

# システム制御理論を用いたサプライチェーンの 解析と一改良法—プッシュ方式の場合\*

西 平 直 史

## 1 はじめに

制御理論は横断的の学問として知られ、制御工学のみならず他の様々な分野への適用が可能である [1]。筆者は、これまでむだ時間システムに対する安定理論がサプライチェーンの解析や設計に適用可能なことを示してきた [2, 3, 4, 5]。これらの文献の中で、単一のサプライチェーンがむだ時間システムとしてシステム表現できること、むだ時間システムの安定条件を用いて Bullwhip 効果を抑制できること、また、むだ時間システムに対するサーボ系の設計理論を援用することで高い性能を達成できることを示した。また、二つのサブシステムからなるサプライチェーンにも適用できることを示した。

ところで、“サプライチェーン”システムという場合は複数のサブシステムから構成されたシステムが一般的であり、これまで対象とした単一あるいは二つのみを対象としたものは限定的である。そこで、本稿ではサブシステムの数の限定をしない一般的なサプライチェーンシステムを対象とする。まず二つのサブシステムから成るサプライチェーンシステムを例としてプッシュ方式 [6] で制御を考えた場合の解析を制御理論の立場から行い、Bullwhip 効果が生じる原因を明らかにする。また、その結果を一般的なシステムへ拡張する。最後に、その結果に基づいてプッシュ方式の一改良法を提案する。

## 2 二つのサブシステムの例

本節では、二つのサブシステムからなるサプライチェーンシステムを考える。図 1 に示したように、1つ目のシステム  $S_1$  は 2 工程から成り、完成品を  $S_1$  の在庫置き場に置く。2つ目のシステム  $S_2$  は 1 工程のみで、その完成品を  $S_2$  の在庫置き場に置く。発注に応じて  $S_2$  の在庫置き場から出庫を行う。また、各工程、発注および入庫は単位時間ごとに行なわれるものとする。時刻  $k$  におけるシステム  $S_1$  の 1 工程目の仕掛数を  $x_1(k)$ 、 $S_1$  の 1 工程目の仕掛数を  $x_2(k)$ 、システム  $S_2$  の 1 工程目の仕掛数を  $x_3(k)$ 、 $S_2$  の在庫数を  $x_4(k)$  とし、発注数を  $w(k)$  とする。また、システム  $S_1$  への入庫数を  $u(k)$  とする。なお、ここではプッシュ方式を考えているため、 $S_1$  の在庫はすべて  $S_2$

\* 2012 年 11 月 30 日受理

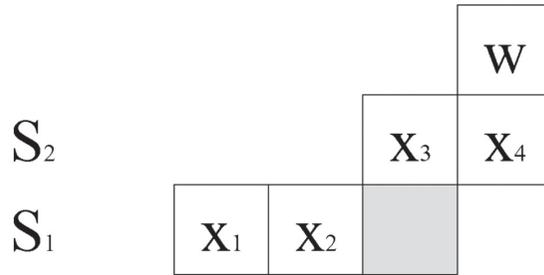


図1：二つのサブシステムから成るサプライチェーン

に送られることになり、これは  $x_3(k)$  と等しくなる。以上の関係を用いて、システム表現を作成すると、 $S_1$ については

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ。また、 $S_2$ については

$$x_4(k+1) = x_4(k) + x_3(k) - w(k) \tag{2}$$

が成り立つ。以後では、各状態の平衡点は0として取り扱うが、文献[5]に示しているとおり、これは一般性を失うものではないことに注意しておく。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_4(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \end{aligned} \tag{3}$$

式(1)-(2)をまとめると、以下のシステムを得る。

さて、プッシュ方式の場合の入庫数を考えてみよう。プッシュ方式では、最終の在庫置き場から出庫した数（この例では  $S_2$  の出庫数  $w(k)$ ）が次期の入庫数になる。したがって、

$$u(k) = w(k-1) \tag{4}$$

が成り立つ。また、(2)式から

$$w(k) = x_4(k) + x_3(k) - x_4(k+1) \tag{5}$$

が成り立つことより、

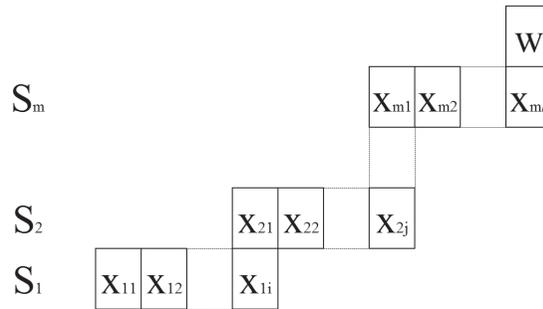


図2：一般化したサプライチェーンシステム

$$\begin{aligned}
 w(k-1) &= x_4(k-1) + x_3(k-1) - x_4(k) \\
 &= x_4(k-1) + x_2(k) - x_4(k)
 \end{aligned} \tag{6}$$

が成り立つ。(4)式と(6)式より

$$u(k) = x_4(k-1) + x_2(k) - x_4(k) \tag{7}$$

が得られる。これを(3)式に代入すると

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_4(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k)
 \end{aligned} \tag{8}$$

が得られる。

さて、(8)式の内部安定性を解析してみよう。在庫数  $w(k)$  は外生信号であり、このシステムの内部安定性には影響しないので、

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の固有値がすべて複素平面上の単位円内にあればこのシステムは内部安定である[7]。数値演算ソフトウェアを用いて固有値を計算してみると、固有値は  $1, 0.727136 \pm i0.4300143i, -0.727136 \pm i0.9340993i$  の五つである。これらの固有値のうち最後の二つの大きさは  $1.183752$  で

あり、複素平面上の単位円の外にある。内部安定性のこの条件は必要十分条件であるので、式(8)で表わされるシステムは不安定である。以上から、サプライチェーンにおいてプッシュ方式を用いた場合にBullwhip効果が生じる要因を制御理論の観点から考えると、プッシュ方式を適用したシステムが不安定になるため、出庫数（つまり次期の入庫数）が一定量からの増減を繰り返すときに、それがシステムを流れていく過程で、数量の振れが大きくなるためであると言える。

### 3 システムの一般化とプッシュシステムの改良法

前節では、二つのサブシステムからなるサプライチェーンを例に、プッシュ方式でBullwhip効果が生じる要因を制御理論の観点から考察した。本節では、システムを一般化し、制御理論の観点からプッシュシステムの改良法を検討する。図2のような $m$ 個のサブシステムから成るサプライチェーンを考える。 $m$ 個のシステムが順に処理を行い、サブシステムで処理を終えたモノを次のサブシステムに全量引き渡すシステムである。時刻 $k$ におけるサブシステム $s$ の第 $l$ 工程の仕掛数（または在庫数）を $x_{sl}(k)$  で表わすことにする。また、入庫数を $u(k)$  ,出庫数を $w(k)$  で表わす。加えて、 $S_1, S_2, S_{m-1}, S_m$ の工程数はそれぞれ $i-1, j-1, h-1, l-1$ 個あるとする。

以上の準備のもとに、このシステム全体のシステム表現を求めてみよう。 $S_1$ は

$$\begin{aligned} x_{11}(k+1) &= u(k) \\ x_{12}(k+1) &= x_{11}(k) \\ &\vdots \\ x_{1l}(k+1) &= x_{1l-1}(k) \end{aligned} \tag{9}$$

と表わされる。 $S_2$ は

$$\begin{aligned} x_{21}(k) &= x_{1l}(k) \\ x_{22}(k+1) &= x_{21}(k) \\ &\vdots \\ x_{2j}(k+1) &= x_{2j-1}(k) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。同様に考えると $S_m$ は

$$\begin{aligned} x_{m1}(k) &= x_{m-1,h}u(k) \\ x_{m2}(k+1) &= x_{m1}(k) \\ &\vdots \\ x_{ml}(k+1) &= x_{ml}(k) + x_{m,l-1}(k) - w(k) \end{aligned} \tag{11}$$

となる。

これらを改めて

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_{11}(k) \\ x_2(k) &= x_{12}(k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{i-2}(k) &= x_{1i-1}(k) \\
 x_{i-1}(k) &= x_{2i}(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(k) &= x_{mi-1}(k) \\
 x_n(k) &= x_{mi}(k)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

とおくと全体システムは  
 が得られる。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \\ x_n(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \\ x_n(k-1) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

さて, (13)式を

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + B_{1u}(k) + B_{2w}(k)
 \tag{14}$$

と表わすことにしよう. ただし

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \\ x_n(k-1) \end{bmatrix}$$

である。

(14)式に $u(k) = K\xi(k)$ なる状態フィードバックを構成すると、閉ループ系は

$$\xi(k+1) = (A+B_1K)\xi(k) + B_2w(k) \quad (15)$$

となる。前節の議論と同様に(15)式が内部安定であるためには、 $A+B_1K$ の固有値が複素平面内の単位円内にあればよい。この条件は、不等式

$$(A+B_1K)^T P (A+B_1K) - P \geq 0 \quad (16)$$

が成り立つ正定対称行列 $P$ が存在することと等価である [8]。(16)式は両辺に左右から $P^{-1}$ を掛けて Shure complement を使うと

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & P^{-1}(A^T + K^T B_1^T) \\ (A+B_1K)P^{-1} & -P^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

となる。 $P^{-1}$ を $X$ とおき、 $KP^{-1} = KX$ を $W$ とすれば、次の条件が導かれる。

条件1 LMI

$$\begin{bmatrix} -X & XA^T + WT B_1^T \\ AX + B_1 W & -X \end{bmatrix} \leq 0 \quad (18)$$

を満たす行列 $W$ と正定対称行列 $X$ が存在するとき、(14)式で表わされるシステムは $u(k) = K\xi(k)$ なる状態フィードバックで安定化可能である。また、その時のフィードバックゲインは $K = WX^{-1}$ で求められる。

条件1で求めたフィードバック則について考察しておこう。フィードバックゲイン $K$ を

$$K = [K_1 \ K_2 \ \cdots \ K_{n-1} \ K_n] \quad ]$$

とすると

$$\begin{aligned} u(k) &= K\xi(k) \\ &= [K_1 \ K_2 \ \cdots \ K_{n-1} \ K_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \\ x_n(k-1) \end{bmatrix} \\ &= K_1 x_1(k) + K_2 x_2(k) \\ &\quad + \cdots + K_{n-1} x_{n-1}(k) + K_n x_n(k) + K_{n+1} x_n(k-1) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

一方で、ブッシュ方式の場合は

$$u(k) = x_n(k-1) + x_{n-2}(k) - x_n(k) \quad (20)$$

となるので、(19)式において、 $K_{n+1} = 1$ 、 $K_{n-2} = 1$ 、 $K_n = -1$ とした場合がプッシュ方式(20)式になる。したがって、(19)式は(20)式を含んだより一般的なものになっている。

また、このフィードバック則は、サプライチェーン内の仕掛数（または在庫数）の情報すべてと最終在庫の一期前の情報を必要とするものであり、プッシュ方式と比較してより多くの情報を必要とする代わりにBullwhip効果を抑制することが可能となる。

#### 4 数 値 例

2節で考えた二つのサブシステムから成るサプライチェーンを考える。すべてのサブシステムの平衡点は0とする。これは、理想在庫からの偏差を考えていることになる。また、出庫数として平均0,標準偏差10の正規分布を考える。平均を0としたのは、前述したように理想在庫からの偏差を考えているためであり、正規分布とすることによって、出庫数すなわち需要量の変化が正規分布で表されるような製品を考えていることになる。また、正規分布において、約99.7%が平均を中心とする標準偏差の6倍の区間に出現するので、標準偏差を10とすることによって、-30から30までのデータが発生することになる。この数値例ではMicrosoft ExcelのNORMINV (RAND (), 0,10) により生成し、生成した値の小数点以下を切り捨てて整数にしている。プッシュ方式による結果を図3に示す。

図3において、薄いラインが出庫数 $w(k)$ であり、濃いラインが最終在庫 $x_4(k)$ である。出庫数は次の期の入庫数となるので、入庫数の増減に対して、最終在庫の増減の振れが大きくなっている様子が表れており、二つのサブシステムから成る単純なシステムであるがBullwhip効果が表れていることがわかる。

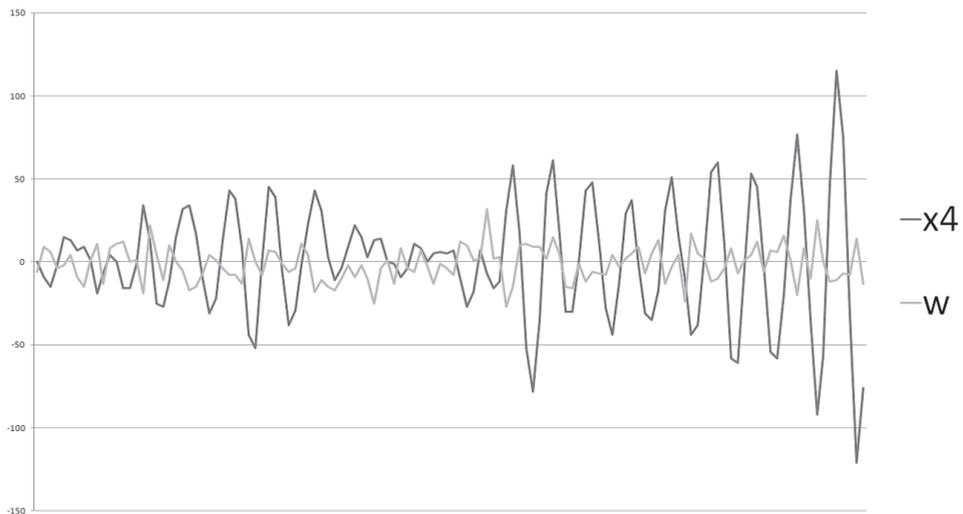


図3：プッシュ方式による在庫数と出庫数

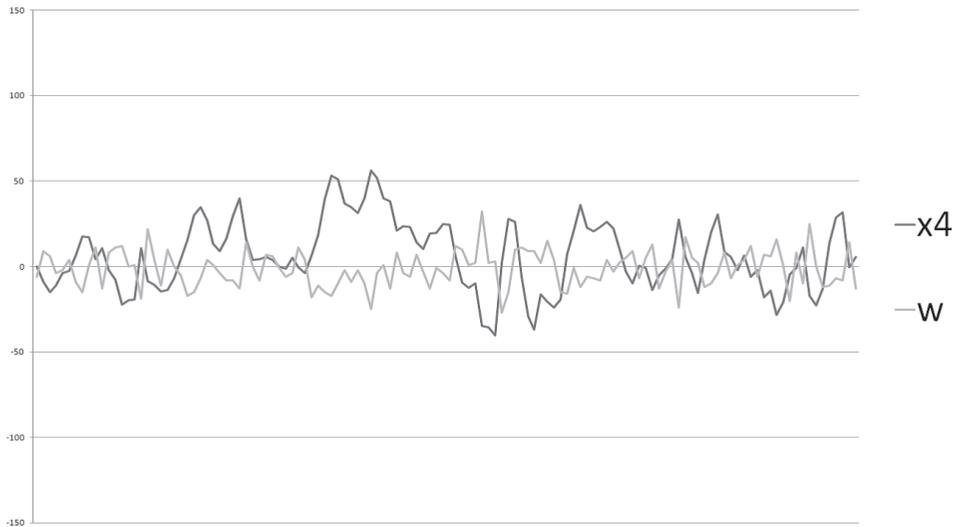


図4：条件1による在庫数と出庫数

一方，条件1に基づいて設計してみよう。Matlabで解を求めると，

$$X = \begin{bmatrix} 2.0904 & -0.6076 & -0.4255 & -0.3624 & -0.1936 \\ -0.6076 & 3.2519 & -1.0170 & -0.9877 & -0.3148 \\ -0.4255 & -1.0170 & 4.6231 & -2.8263 & -0.7902 \\ -0.3624 & -0.9877 & -2.8263 & 4.6928 & 1.6404 \\ -0.1936 & -0.3148 & -0.7902 & 1.6404 & 7.5823 \end{bmatrix}$$

$$W = [-0.3956 \quad -0.3914 \quad -0.2210 \quad -0.2246 \quad -0.1045]$$

と求まる。実際，Xの固有値は4.0483, 2.4369, 0.5394, 5.9177, 9.2982でありXは正定対称行列である。これよりKを求めると

$$K = WX^{-1} = [-0.5624 \quad -0.5667 \quad -0.5593 \quad -0.5506 \quad 0.0092]$$

が得られる。この制御則を用いた場合の結果を図4に示す。ここで用いているw(k)は図3と同じものである。図4からわかるように，この方式では入庫数の増減に対して，最終在庫の増減の振れが小さくなっており，Bullwhip効果が抑えられていることがわかる。

## 5 おわりに

本稿では，サプライチェーンシステムを制御理論の観点から解析した。まず，二つのサブシステムから成るサプライチェーンに対してプッシュ方式で制御した場合，制御理論の観点から考えると内部安定性が失われており，これがBullwhip効果の要因であると考えられることを示した。

また、一般化したサプライチェーンシステムに対して、プッシュ方式を改良した制御方法の一手法を提案して、数値例によりその有効性を確認した。

### 参考文献

- [1] 木村英紀：横断型科学技術とは何か？；計測と制御, 42-3,158/164 (2003)
- [2] 西平直史：むだ時間システム表現を用いたサプライチェーンシステムの解析——サブシステムが2つの場合——；山形大学人文学部研究年報, 第9号, 69/73 (2012)
- [3] 西平直史：サプライチェーンに対して構成したサーボ系の解釈とその応用；山形大学大学院社会文化システム研究科紀要, 第7号, 105/109 (2010)
- [4] 西平直史：むだ時間システムとしてとらえたサプライチェーンについての考察——リードタイムが既知の場合；山形大学人文学部研究年報, 第6号, 157/162 (2009)
- [5] 西平直史：サプライチェーンにおけるBullwhip効果を抑制するための一手法——むだ時間システムとメモリーレスフィードバックを用いた解析——；山形大学人文学部研究年報, 第5号, 205/214 (2008)
- [6] 森田道也：サプライチェーンの原理と経営；新世社 (2004)
- [7] 萩原朋道：デジタル制御入門；コロナ社 (1999)
- [8] 岩崎徹也：LMIと制御；昭晃堂 (1997)

**An Analysis and an Improved Control  
Method for the Supply-Chain System  
Using Control Theory - a case of  
the push system**

Naofumi NISHIHIRA

In this paper, we consider the problem of stability of the supply-chain system using control theory. First, we consider a supply-chain system which consists of two sub-systems. When the push system was applied, the supply-chain system became unstable and causing the 'Bullwhip effect'.

Next, an improved control method for a generalized system was proposed. In this case, the control law uses all of the state variables.

Finally, we shown the effectiveness of the proposed method using a numerical example.