山形大学人文学部研究年報　第11号（2014. 3）59－67

プル方式を用いたサプライチェーンの解析と一改良法[1]

西　　平　　直　　史

1　はじめに

近年，多くの企業が市場のニーズに合わせて大量生産から多品種少量生産へと生産方式を改めている。その結果，サプライチェーンを適切に設計・運営することの重要性が増しており，多くの企業はその刷新や強化に努力している。サプライチェーンの設計において，最も基本的な方式はプッシュ方式である。これは，供給すべき量をサプライチェーンの最初の段階から押し込んでいく方式であり，簡便ではあるが，過剰在庫を抱えやすいことが知られている。一方，プル方式は需要に応じて最後の段階の活動が稼働し，その稼働量が前段階へと要請量となってさかのぼる方式である。プル方式は，プッシュ方式に比べて在庫を抑制する性質を持っていると言われている［１］。

ところで，制御理論は横断型の学問として知られており，制御工学のみならず他の様々な学問への応用が可能である［２］。筆者は，サプライチェーンを制御理論を用いて解析し，プッシュシステムを動的システム表現すると，内部安定性に関して不安定になるため Bullwhip 効果が生じることを示した［３］。言い換えると，不安定性が原因で過剰在庫につながることが明らかになった。本稿では，プル方式を制御理論を用いて解析することを目的とする。プル方式を動的システム表現し，そのシステムの内部安定性に着目することにより，プル方式がプッシュ方式よりも在庫を抑制する性質を持っていることを明らかにする。また，過剰在庫をさらに抑制するための一改良法を提案する。

2　二つのサブシステムの例－プル方式の場合

本節では，文献［３］と同様の二つのサブシステムをもつサプライチェーンを対象とし，プル方式で設計した場合を考える。プッシュ方式の場合，ある工程での仕掛かり品はすべて次の工程に渡すことになるが，プル方式の場合は，次工程からの要請にしたがって出庫することになるのでシステム表現が異なることを注意しておく。また，本稿では一般性を失うことなく理想在庫数を平衡点とし，その偏差を動的システム表現する。さらに，理想在庫は偏差の負の最大値より大きいものとしておく[2]。

まず，時刻 k における最終在庫置き場の在庫数を $w(k)$ とすると

1　2013年12月２日受理
2　例えば，偏差が－50から50までの間にあるとすると，理想在庫は50個以上あるという状況を考えている。

$$w(k+1) = w(k) + d(k-1) - d(k) \tag{1}$$

となる。ただし $d(k)$ は時刻 k における出庫数である。(1)式は，時刻 $k+1$ での在庫数 $w(k+1)$ はもとの在庫 $w(k)$ から $d(k)$ だけ出庫し，一期前の出庫数 $d(k-1)$ が前段階から入庫することを表わしている。同様に考えていくと，S_1 の i 段階目の仕掛数を $x_{1i}(k)$，S_2 の j 段階目の仕掛数を $x_{2j}(k)$ とすると，システム表現は

$$x_{22}(k+1) = x_{22}(k) + d(k-2) - d(k-1) \tag{2}$$
$$x_{21}(k+1) = x_{21}(k) + d(k-3) - d(k-2) \tag{3}$$
$$x_{13}(k+1) = x_{13}(k) + d(k-4) - d(k-3) \tag{4}$$
$$x_{12}(k+1) = x_{12}(k) + d(k-5) - d(k-4) \tag{5}$$
$$x_{11}(k+1) = x_{11}(k) + d(k-6) - d(k-5) \tag{6}$$

となる。式(1)－(6)を行列を用いてまとめると，

$$x(k+1) = \mathrm{A}x(k) + \hat{d}(k) \tag{7}$$

が得られる。ただし，

$$x(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ x_{22}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{13}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{11}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{d}(k)=\begin{bmatrix} d(k-1)-d(k) \\ d(k-2)-d(k-1) \\ d(k-3)-d(k-2) \\ d(k-4)-d(k-3) \\ d(k-5)-d(k-4) \\ d(k-6)-d(k-5) \end{bmatrix}$$

である。

さて，このシステム(７)の内部安定性を調べてみよう。$\hat{d}(k)$は出庫数で構成されるベクトルであり，これは外生信号である。内部安定性に外生信号は影響しないので，$\hat{d}(k)=0$としたシステムを考えると，システム行列はＡであり，単位行列である。単位行列の固有値は６つとも１であり，複素平面上の単位円上である。したがって，内部安定性は漸近安定ではないものの安定である。

プッシュ方式の場合，文献[３]に示したように，複素平面上の単位円外の固有値があり，内部安定性は不安定であった。この不安定性が要因で平衡点からのずれ，すなわち理想在庫からのずれが増幅され，過剰在庫につながると言える。一方，プルシステムの場合は上記のように漸近安定ではないものの安定である。平衡点からのずれは平衡点に近づくことはないが遠ざかることもない。つまり，理想在庫からのずれが元に戻ることはないが増幅されて過剰在庫につながることもない。したがって，これまで言われてきたとおりプル方式の方がプッシュ方式より在庫を抑制する性質をもっていることが，内部安定性の観点から説明できる。

３　システムの一般化とプルシステムの一改良法

前節では，二つのサブシステムからなるサプライチェーンにプル方式で設計し，システム制御理論の観点から内部安定性を確認した。その結果，内部安定ではあるが漸近安定ではないことが明らかになり，プル方式はプッシュ方式より在庫を抑制する性質があることが制御理論の観点から示せた。本節では，システムを一般化し，さらにプルシステムの一改良法を提案する。

プルシステムの場合，式(１)－(６)に見られるようにサブシステムがいくつで構成されていようと，次工程が前工程に対して必要量を要請するので，時刻kにおける出庫量(すなわち，時期の要請量にもなる)を$d(k)$とし，サプライチェーン全体でn段階あるとし，そのi(ただし，$i<n$)番目の在庫量を$x_n(k)$とすると，

$$x_n(k+1)=x_n(k)+d(k-1)-d(k) \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$x_i(k+1)=x_i(k)+d(k-(n-i+1))+d(k-(n-i)) \tag{9}$$

$$\vdots$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + d(k-n) + d(k-(n-1)) \tag{10}$$

と表わせる。これを行列を使って表わすと，

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{D}\bar{d}(k) \tag{11}$$

となる。ただし，

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_n(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_1(k) \end{bmatrix}$$

$$d(k) = \begin{bmatrix} d(k) \\ \vdots \\ d(k-(n-i+1) \\ \vdots \\ d(k-n) \end{bmatrix}$$

となる。

さて，一般化したシステムの表現はシステム(11)となることがわかった。システム(11)の内部

安定性は，前節での議論と同様に外生信号 $\bar{d}(k)$ には無関係なので，システム行列 $\bar{A}$ の固有値に帰着される。$\bar{A}$ は明らかに n 次元の単位行列であるから，固有値は n 個とも 1 となり，複素平面上の単位円上にある。したがって，一般化したシステム(11)も前節と同様に漸近安定ではないが安定なシステムである。

次に，このプッシュ方式の改良法を考察してみよう。在庫が増えすぎないために，現在の総仕掛数を把握しておいて，発注数に対して，その総仕掛数に応じた補正を加える(厳密には減じる)ことを考えてみよう。簡単に補正を加えることができるのは，第 1 段階目の発注数であるので，ここに $u(k)$ 個の補正を減じることを考える。すると，(10)式は

$$x_1(k+1) = x_1(k) + d(k-n) + d(k-(n-1)) - u(k) \tag{12}$$

となる。この補正については，プッシュ方式で押し込むことにすると，第 2 段階は

$$x_2(k+1) = x_2(k) + d(k-(n-1)) + d(k-(n-2)) - u(k-1) \tag{13}$$

同様に考えていくと，第 i 段階は

$$x_i(k+1) = x_i(k) + d(k-(n-i+1)) + d(k-(n-i)) - u(k-i+1) \tag{14}$$

となり，第 n 段階すなわち出庫前在庫は

$$x_n(k+1) = x_n(k) + d(k-1) - d(k) - u(k-n+1) \tag{15}$$

となる。

さて，式(12)－(15)に $u(k) = Kx(k)$ を施すことを考える。これは

$$K = [K_1 \cdots K_{n-i+1} \cdots K_n]$$

とすると $u(k) = K\bar{x}(k) = K_1 x_n(k) + \cdots + K_{n-i+1} x_i(k) + \cdots + K_n x_1(k)$ となるので，時刻 k の各段階での仕掛かり在庫に係数をかけたものの総和となる。つまり，それぞれの仕掛かり在庫に重みをかけて，その総和を発注数から減じることになり，仕掛かり在庫が多ければ多いほど減じる量が多くなるため在庫が増えるのをより抑制する効果があると考えられる。

次に，この重み行列 K の設計方法を考えてみよう。(12)－(15)式に $u(k) = K\bar{x}(k)$ を施した閉ループ系は，

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k)+\bar{D}\bar{d}(k)+\bar{B}_1K\bar{x}(k) \\
&\quad +\bar{B}_2K\bar{x}(k-1)+\cdots+\bar{B}_nK\bar{x}(k-n+1) \\
&= (\bar{A}+\bar{B}_1K)\bar{x}(k)+\bar{D}\bar{d}(k) \\
&\quad +\bar{B}_2K\bar{x}(k-1)+\cdots+\bar{B}_nK\bar{x}(k-n+1)
\end{aligned} \tag{16}
$$

となる。ただし,

$$
\begin{aligned}
\bar{B}_1 &= [I \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0] \\
\bar{B}_2 &= [0 \quad I \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\
&\quad\vdots \\
\bar{B}_n &= [0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad I]
\end{aligned}
$$

である。ここで

$$
\xi(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-i+1) \\ \vdots \\ x(k-n+1) \end{bmatrix}
$$

とおくと，システム(16)は

$$
\xi(k+1) = (\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K})\,\xi(k) \tag{17}
$$

と書ける。ただし,

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & I & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}
$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & K & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & K \end{bmatrix}$$

である。システム(17)と正定対称行列Pに対して，二次関数

$$V(\xi) = \xi^T(k)P\xi(k) \tag{18}$$

を考え，システムの解軌道に沿った差分を計算すると

$$\begin{aligned} \Delta V(\xi) &= \xi^T(k+1)P\xi(k+1) - \xi^T(k)P\xi(k) \\ &= \xi^T(k)\left((\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K})^T P(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}) - P\right)\xi(k) \end{aligned} \tag{19}$$

が得られる。Lyapunov の定理より，$\Delta V(\xi) < 0$であれば，システム(17)は内部安定である。この条件は

$$(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K})^T P(\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}) < 0 \tag{20}$$

が成り立つことと等価である。(20)式の両辺から$X = \mathrm{P}^{-1}$をかけ，Shure Complements を使うと

$$\begin{bmatrix} -X & X(\tilde{\mathrm{A}}+\tilde{B}\tilde{K})^T \\ (\tilde{\mathrm{A}}+\tilde{B}\tilde{K})X & -X \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

が得られる。したがって，(21)式を満たす行列$\tilde{K}$と正定対称行列Xが見つかれば，システム(17)は内部安定化可能であり，そのときの重み行列は$\tilde{K}$より求められる。

ところで，(21)式には変数行列$\tilde{K}$とXの積の項があり，線形行列不等式ではない。$\tilde{K}$が任意の

行列であれば,変数変換により線形行列不等式になり,この問題は凸計画化問題に帰着できる[４]が,$\tilde{K}$は(17)式に示したようにブロック対角行列であり,変数変換を用いて線形行列不等式にすることはできない。しかし,この問題の構造は文献[５]にある大規模システムの分散安定化問題と形が類似しており,池田らが提案しているホモトピー法の考え方を用いれば解を求めることができる。

また,文献[６]では古典制御理論を用いてサプライチェーンの解析を試みているが,本稿のように現代制御理論を用いることで,システム行列の固有値問題に帰着することができ,設計においても数値計算を用いて解を求めることができるという利点がある。

４　おわりに

本稿では,プル方式で設計されたサプライチェーンの解析問題を考察した。まず,二つのサブシステムから成るサプライチェーンのシステム表現を求め,その内部安定性は漸近安定ではないものの安定であることを示した。プッシュ方式と比較すると,プッシュ方式は不安定であったためプル方式の方が過剰在庫を抑制する性質があることが制御理論の観点から明らかに示せた。

また,一般化した場合のシステム表現を求め,それに基づいて内部安定性は漸近安定ではないものの安定であることを示した。さらに,すべての仕掛かり在庫の情報を用いたプル方式の一改良法を示した。この方法は,システムを漸近安定にすることにより過剰在庫をさらに抑制することが可能となるが,重み行列の設計方法には計算に工夫が必要になることを示した。

参考文献

[１]森田道也：サプライチェーンの原理と経営,新世社(2004)
[２]木村英紀：横断型科学技術とは何か？,計測と制御,Vol.42, No.3, 158/164(2003)
[３]西平直史：システム制御理論を用いたサプライチェーンの解析と一改良法－プッシュ方式の場合,山形大学人文学部研究年報,Vol.10, 27/36(2013)
[４]岩崎徹也：LMI と制御,昭晃堂(1997)
[５]池田,松本,Zhai,藤崎：大規模システムの分散安定化―ホモトピー法を用いた行列不等式アプローチ,計測自動制御学会論文集,Vol.34, No.12, 1962/1964(1998)
[６]伊藤,橋本,石原：最適制御理論を用いたブルウィップ効果を防止する在庫補充方式の提案,日本オペレーションズ・リサーチ学会2006年春季研究発表会,66/67(2006)

山形大学人文学部研究年報　第11号（2014. 3）59－67

An analysis of and proposed improvement to supply-chain systems using pull systems

Naofumi NISHIHIRA

In this paper, we analyse the question of supply-chain systems which use pull systems. A supply chain system consisting of two sub-systems is considered, whose system is stabe, though not asymptotically so. Its pull system has less excessive stock than its push, the latter being unstable. We propose an improved method for generalized supply-chain systems which is less conservative than standard pull systems, but with higher computational complexity.