山形大学大学院社会文化システム研究科紀要　第７号（2010）105－109

サプライチェーンに対して構成したサーボ系の解釈とその応用*

西　平　直　史
(社会システム専攻企業経営領域担当)

1　はじめに

近年，サプライチェーンにおいてBullwhip効果[1]を抑制する手法について様々な研究がなされている。参考文献[2, 3, 4] では，サプライチェーンをむだ時間をもつ動的プロセスとして定式化し，それに基づいた解析を行っている。

筆者は参考文献[3, 4]において，サーボ系を構成せずに漸近安定条件に基づいた制御則では，Bullwhip効果を抑制することはできるものの偏差が残ってしまうことを示した。加えて，サーボ系を構成することで，サプライチェーンのBullwhip効果を抑制しながら，偏差を取り除くこともできることも示した。したがって，サーボ系を構成したほうが良好な結果を得られることを導いている。

しかしながら，漸近安定条件に基づいた制御則，とくにメモリーレスフィードバック則は，現在の在庫量の一定数倍の発注をすればよいというわかりやすいものであるのに対して，サーボ系を構成した制御則は，何に基づいて発注数を決定しているかがわからないものであり，実際に使う際には制御則の決定方法を理解できずに使うことになり，使いづらい条件である。

そこで，本稿ではリードタイムがないサプライチェーンに対して，構成したサーボ系の解釈を考察する。つまり，この制御則が何に基づいて発注数を決定しているかを導出する。また，得られた解釈をより一般化することで，さらに高性能な制御則を導出する。

*2010年6月29日受理

2　問題の定式化

本稿では，参考文献[3]と同じ以下のシステムを考える。

$$x(k+1)=x(k)+u(k)-d(k) \tag{1}$$

ただし，$x(k)$ は時刻 k における在庫量，$u(k)$ は時刻 k における入庫量，$d(k)$ は時刻 k における出庫量である。

システム(1)において，平衡点を $x(k)=0$ としておく。参考文献[3]に示しているが，この仮定は一般性を失うものではない。また，ある時刻 t_0 が操業開始時刻であって，それまでの在庫数は平衡点から変動しないものと仮定しておく。

3　サーボ系の解析と解釈

まず，システム(1)に対してサーボ系を構成しておこう。参考文献[3, 4, 5]と同様の手法で以下のようにサーボ系を構成する。すなわち，ステップ状の目標信号 $r(k)$ に追従する問題を考える。そのため，(1)式に対して，観測出力 $y(k)$ を

$$y(k)=x(k) \tag{2}$$

と定める。これは，在庫数を常に計測していることを意味する。実際に在庫数を計測しなくても，初期在庫数と現在までの入出庫数の総数を把握していれば在庫数を計算することができるので，過度に厳しい条件ではないことに注意しておく。

さて，定常偏差を取り除くために積分器

$$x_c(k+1)=x_c(k)+L\{r(k)-y(k)\} \tag{3}$$

を考える。ここで，$x_c(k)$ は積分器の状態，L はパラメータである。

また，サーボ系の構成においては，目標信号 $r(k)$ と実際の出力信号 $y(k)$ の偏差

$$e(k)=r(k)-y(k) \tag{4}$$

を考え，これをサーボ系にフィードバックするこ

とを考えているが，本稿の問題においては，目標信号 $r(k)=0$，出力信号 $y(k)=x(k)$ であることに注意すると，(3)式は，

$$x_c(k+1)=x_c(k)-Lx(k) \tag{5}$$

となる。

これらの準備に基づいてサーボ系を構成してみよう。サーボ系の内部安定性には外生信号は影響しないので，$d(k)=0$ として，拡大系を構成すると，

$$\xi(k+1)=A\xi(k)+Bu(k) \tag{6}$$

が得られる。ただし，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -L & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\xi(k)=\begin{bmatrix}x(k)\\ x_c(k)\end{bmatrix}$$

である。

また，参考文献[3]と同様に $u(k)=Kx(k)+x_c(k)$ なるフィードバックを施すと，

$$\xi(k+1)=A\xi(k) \tag{7}$$

が得られる。ただし，

$$A=\begin{bmatrix}1+K & 0\\ -L & 1\end{bmatrix}$$

であり，K はパラメータである。拡大系(7)を用いると直ちにつぎの条件が導かれる。

（条件１）　ある K と L に対して，つぎの LMI を満たす正定対称行列 X が存在するとき，拡大系(7)は漸近安定である。

$$\begin{bmatrix}X & W^T\\ W & X\end{bmatrix}>0 \tag{8}$$

ただし，

$$W=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}K\\ -L\end{bmatrix}[1\quad 0]X$$

である。

（略証）　拡大系に対して，二次の関数

$$V(k)=\xi^T(k)P\xi(k)$$

を考え，拡大系(7)の解軌道に沿った差分を計算すると

$$\begin{aligned}\varDelta V(k)&=V(k+1)-V(k)\\ &=A^TPA-P\end{aligned}$$

となる。$\varDelta V(k)>0$ であれば，拡大系(7)は漸近安定となることと，$X=P^{-1}$ とおくこと，および Schur complement[6] を用いると条件を得る。

（略証終）

さて，つぎに $u(k)=Kx(k)+x_c(k)$ の解釈について考察してみよう。すなわち，右辺の第一項は現在の在庫数 $x(k)$ を K 倍して発注するという簡単な手法であるが，第二項の $x_c(k)$ の意味を考えよう。(5)式をもう一度記すと，

$$x_c(k+1)=x_c(k)-Lx(k)$$

であるから，時刻を 1 だけ戻すと，

$$x_c(k)=x_c(k-1)-Lx(k-1)$$

が導かれる。これを用いると，

$$\begin{aligned}u(k)&=Kx(k)+x_c(k)\\ &=Kx(k)+x_c(k-1)-Lx(k-1)\end{aligned}$$

となる。同様の計算を逐次行っていくと，

$$\begin{aligned}u(k)&=Kx(k)+x_c(k)\\ &=Kx(k)-Lx(k-1)+x_c(k-1)\\ &=Kx(k)-Lx(k-1)-Lx(k-2)\\ &\quad+x_c(k-2)\\ &\quad\vdots\\ &=Kx(k)-L\sum_{i=1}^{T}x(k-i)\end{aligned} \tag{9}$$

が得られる。ただし，T は初期時刻 t_0 から数えた現在の時刻である。

さて，(9)式について考えてみよう。右辺の第一式と最後の式を比較すると，

$$x_c(k)=-L\sum_{i=1}^{T}x(k-i) \tag{10}$$

であることが言えるから，$x_c(k)$ は，過去の在庫数の履歴の総和を計算してそれに定数 L 倍し発注数を調整していることになる。すなわち，平衡点は $x(k)=0$ と仮定しているので，もし在庫数が初期時刻から常に平衡状態にあったとすると，$x_c(k)$ は 0 となるので現在の在庫数の定数倍だけが発注されることになる。一方，L の係数が -1 であることに注意すると，平衡状態からの偏

差が生じた場合には，その偏差の符号の逆の方向へ発注数を調整するものとなっている。これにより，サーボ系を構成することで偏差を無くす働きをしていることがわかる。

4　サーボ系の応用

ここでは，制御則(9)式を一般化することを考える。(9)式では，偏差の総和をとってそれを L 倍して出庫数を調整していた。これに対して，過去の偏差全てに係数を導入し，それをパラメータとして求めてみる。すなわち，制御則として

$$\begin{aligned} u(k) &= K_0x(k)+K_1x(k-1)+K_2x(k-2) \\ &\quad +\cdots+K_T(x-T) \\ &= K_0x(k)+\sum_{i=1}^{T}K_ix(k-i) \end{aligned} \tag{11}$$

を考える。このとき，$K_0=K$，$K_1=K_2=\cdots=K_T=-L$ とすれば(10)式となるので，(11)式は(10)式を一般化している。

(11)式を(1)式に施すと，

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k)+K_0x(k) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{T}K_ix(k-i)-d(k) \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる。(12)式は，

$$\tilde{\xi}(k)=\tilde{A}\tilde{\xi}(k)-d(k) \tag{13}$$

と表される。ただし，

$$\tilde{\xi}(k)=\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ \vdots \\ x(k-T) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1+K_0 & K_1 & K_2 & \cdots & K_T \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。これよりつぎの条件が導出される。

条件 2　つぎの行列不等式を満たす定数 K_0，K_1，K_2，$\cdots$，K_T と正定対称行列 X が存在するとき，システム(13)は漸近安定である。

$$\begin{bmatrix} X & X\tilde{A}^T \\ \tilde{A}X & X \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

証明は条件 1 と同様に行うことができるので省略する。

さて，条件 2 は前述のように条件 1 を完全に含んだものであり，パラメータが増えているためより制御性能が高い条件であると考えられる。その一方で，増えたパラメータを決定する方法についてはさらに考察が必要になる。

また，条件 1，条件 2 ともに初期時刻 t_0 までの履歴を必要とするが，適当な τ（$< T$）個分だけの履歴を使うことで，より使いやすい条件になる。このときの制御則は

$$u(k)=K_0x(k)+\sum_{i=1}^{\tau}K_ix(k-i) \tag{15}$$

であり，

$$\begin{bmatrix} X & X\bar{A}^T \\ \bar{A}X & X \end{bmatrix} > 0 \tag{16}$$

を満たす正定対称行列 X を探すことになる。ただし，

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1+K_0 & K_1 & K_2 & \cdots & K_\tau \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

この場合，τ 個分だけの履歴で打ち切っているため，条件 2 に比べると制御性能が落ちることが予想される。

5　おわりに

本稿では，サプライチェーン・システムを動的システムとして定式化し，それに対して構成したサーボ系の解釈について考察した。サーボ系を構成することによって偏差を取り除くことができるが，それはこれまでの偏差の履歴の総和を用いて，発注数を調整しているためであることを明らかにした。また，その応用としてサーボ系を構成した条件を含んだ，より一般的な条件を導出した。この条件はサーボ系を構成する必要はないが，かな

り大きな行列を取り扱うことが必要となるという短所もある。さらに，履歴の一部だけを使う条件も示した。

各条件のパラメータの系統的な設計方法については，ヒューリスティックな方法に頼らざるを得ないが，本稿の行列不等式条件は最適化条件ではなく可解条件であるので，分枝限定法などの数値計算によって実用的に計算することは可能である。

また，本稿では，サーボ系の本質的な解釈を行うために，リードタイムがない状況を考察した。実際にはリードタイムを考察することが必要である。これは今後の課題としたい。

参考文献

[1] 圓川隆夫，生産システム，生産管理における全体最適，精密工学会誌，67–11, pp. 1764–1768（2001）

[2] 伊藤利昭・橋本芳宏・石原大司，最適制御理論を用いたブルウィップ効果を防止する在庫補充方式の提案，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2006 年春季研究発表会, pp. 66–67（2006）

[3] 西平直史，サプライチェーンにおける Bull-whip 効果を抑制するための一手法ーむだ時間システムとメモリーレスフィードバックを用いた解析ー，山形大学人文学部研究年報, 5, pp. 205–214（2008）

[4] 西平直史，むだ時間システムとしてとらえたサプライチェーンについての一考察ーリードタイムが既知の場合ー，山形大学人文学部研究年報，6, pp. 157–162（2009）

[5] 渡部慶二，むだ時間システムの制御，社団法人計測自動制御学会，(1993)

[6] 岩崎徹也，LMI と制御，昭晃堂，(1997)

[7] 萩原朋道，ディジタル制御入門，コロナ社，(1999)

[8] 井村順一，システム制御のための安定論，コロナ社，(2000)

[9] 杉山昌平，復刊差分・微分方程式，共立出版株式会社，(1999)

An Interpretation of the Servo System for Supply Chain and Its Application

Naofumi NISHIHIRA

（Assosiate Professor, Business Systems, Social Systems Course）

An interpretation of the servo system for the supply chain and its application shall be considered in this paper. This paper aims to clarify the control law that used the servo system was of sum total use in the history of steady state errors. Moreover, a more general condition is derived based on the servo system approach.