

モンテカルロフィルタの理論と応用

——SCD モデルへの応用——

砂 田 洋 志

(社会システム専攻 企業経営領域担当)

1 はじめに

経済現象をモデル化する際に用いられる経済変数の中には観察可能な変数がある一方で、観察不可能な変数もある。観察不可能な変数は状態変数、状態変数を用いたモデルは状態空間モデルと呼ばれる。景気のように、状態変数の中には観察可能な経済変数に大きな影響を与えるものがある。そのため、状態空間モデルが必要とされ、経済学を始めとして多くの分野で利用されている。

状態空間モデルは、観測可能な変数と状態変数の関係を記述した観測方程式、状態変数の時系列的な関係を記述した遷移方程式によって構成される。状態変数の推定は多くの分野に関心を持たれているが、当初は観測方程式と遷移方程式が線形である上、両方の方程式内に含まれる誤差項が正規分布に従う場合に限って、Kalman (1960) で提案されたカルマンフィルタを用いて推定することができた。統計的な手法が進化して、Kitagawa (1993,1996) と Gordon et.al. (1993) によって線形性と正規性が満たされない状態空間モデルであっても推定できる方法が提案された。Kitagawa (1993,1996) においてこの方法はモンテカルロフィルタ (monte carlo filter) と呼ばれている。¹ モンテカルロフィルタはさらに発展し、Kitagawa (1998) において未知パラメータも状態変数と考える自己組織化状態空間モデルが提案された。

モンテカルロフィルタはカルマンフィルタよりも一般的な推定方法であるが、数値計算的な推定

方法であるために計算負荷が高い。したがって、コンピュータの性能が高くないと推定できない。このため今まで広く利用されてこなかったと考えられる。今後も経済理論やモデルが複雑化されるものの、コンピュータの性能は向上し続ける。したがって、複雑なモデルの推定を可能にするモンテカルロフィルタへの期待は今後、一層高まると考えられる。

日本の先行研究を調べた限り、経済現象を状態空間モデルによって定式化した上でモンテカルロフィルタを用いてパラメータや状態変数を推定した研究は多くないと考えられる。先行研究として、金利モデルに適用した佐藤・高橋 (2005)、確率ボラティリティーモデルへ適用した矢野・佐藤 (2007)、NAIRU (インフレを加速させない失業率) に適用した高部 (2010)、DSGE (動学的確率的一般均衡) モデルの推定に適用した矢野・飯田・和合 (2011) などを挙げることができる。

本稿では、モンテカルロフィルタをデューレーションの時系列的な分析へ応用する。デューレーションとは、証券市場や商品市場の1日の取引の時間間隔であり、1日の中でパターンを持っている。寄り付きと大引けは取引が集中するので取引間隔が短くなるものの、昼間は取引が少なくなるので取引間隔が広がるのである。こうしたパターンは日中効果 (intraday effect) と呼ばれている。時系列モデルを用いたデューレーションの研究として、Engle=Russell (1997,1998) のACD (Autoregressive Conditional Duration) モデルを基礎として様々なモデルが提案されてきた。² その中で本稿では発展的なモデルである

¹ Kitagawa (1993,1996) ではモンテカルロフィルタという名称を用いているが、近年は粒子フィルタ (particle filter) という名称も広く用いられている。

² 先行研究については Pacurar (2008) に詳しくまとめられている。

Bauwens=Veredas (2004) の SCD (Stochastic Conditional Duration) モデルを取り上げる。SCD モデルの先行研究としては、擬似最尤法で推定する Bauwens=Veredas (2004) に加えて、ベイズ統計学の立場から SCD モデルを推定する方法を示した Strickland 他 (2006)、レバレッジ効果を導入した SCD モデルをスライスサンプラーによって推定する Men 他 (2015,2016) などがある。日本の市場を対象としたデュレーションの研究に限定すると森保 (2006) が挙げられる。森保 (2006) では Log - ACD モデルと ACM - ACD モデルを用いて東京金先物市場が計量的に分析されている。杉浦 = 中妻 (2016) では、株式市場のティックデータへ SCD モデルが適用され、モンテカルロフィルタを用いてパラメータが推定されている。さらに、推定結果を用いて約定時間の予測も行なわれている。本稿は杉浦 = 中妻 (2016) を大いに参考にしている。この他には幾つかの研究が行われているに過ぎない。

前述したとおり、モンテカルロフィルタは非線形な状態空間モデルや誤差項が正規分布に従わない状態空間モデルのパラメータや状態変数の推定に利用できる有益な推定方法である。そこで、モンテカルロフィルタを紹介することが本稿の第1の目的である。そして、第2の目的は現実の経済モデルへの応用であり、ファイナンス分野の SCD モデルを取り上げて予測・フィルタリング・平滑化という3種類の過程を紹介することである。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第2節ではモンテカルロフィルタについて説明する。その際、自己組織化状態空間モデルの推定方法も紹介する。第3節では応用例の SCD モデルを紹介する他、自己組織化状態空間モデルを用いて同モデルを推定する方法を説明する。第4節ではデータの説明とデータを平滑化する方法について説明する。第5節では、東京商品取引所に上場されている金先物市場のティックデータを対象に SCD モデルを適用して、状態変数とパラメータをフィルタリングによって推定した結果を示す。

そして、ベイズ統計学を用いて SCD モデルを推定した砂田 (2018) の結果と比較する。第6節では本稿の内容をまとめる。

2 モンテカルロフィルタ³

状態空間モデルは観測方程式と遷移方程式で構成される。両方の方程式が線形の式で記述されると共に誤差項が正規分布に従う状態空間モデルであれば、線形正規状態空間モデルと呼ばれ、状態変数について解析的な解を得ることができる。しかし、そうでなければ解析的に解を得ることができないので、数値計算的に解を得ることとなる。線形性や正規性が仮定されない状態空間モデルは一般状態空間モデルと呼ばれ、その推定にはモンテカルロフィルタが利用される。この節では、一般状態空間モデルの状態変数を数値計算的に推定する方法であるモンテカルロフィルタについて説明する。

2.1 一般状態空間モデル

モンテカルロフィルタで扱う一般状態空間モデルは線形モデルとは限らないので、以下の式のような関数形で記述する。関数形で記述すると、線形モデルは特殊形として含まれる。

$$x_t = F(x_{t-1}, v_t) \quad \text{遷移方程式} \quad t=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

$$y_t = H(x_t, w_t) \quad \text{観測方程式} \quad (2)$$

ただし、 $\{y_t\}_{t=1}^n$ は観測される時系列データ、 $\{x_t\}_{t=1}^n$ は観測されない状態変数である。 $\{w_t\}_{t=1}^n$ は観測方程式における誤差項であり、その確率密度関数は $r(w_t)$ である。 $\{v_t\}_{t=1}^n$ は遷移方程式における誤差項であり、その確率密度関数は $g(v_t)$ である。以下の小節において一期先予測とフィルタリングの方法を説明する。

2.2 一期先予測

一期先予測を行なうには、 $p(x_{t-1} | \tilde{y}_{t-1})$ からサンプリングして得た状態変数の粒子 $\{f_{t-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ に

³ この節の記述は北川 (2005) の付録 D. 1 と D. 2、樋口編 (2011) の 6. 2 節に大きく負っている。

加えて、 $q(v)$ からサンプリングして得た粒子 $\{v_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ も必要である。なお、 $\tilde{y}_t = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{t-1}, y_t\}$ は時点 t までの時系列データである。これらの粒子を(1)の遷移方程式 $x_t = F(x_{t-1}, v_t)$ に代入することによって、状態変数 x_t の一期先予測の粒子 $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得ることができる。

$$p_t^{(j)} = F(f_{t-1}^{(j)}, v_t^{(j)}) \quad j=1, 2, \dots, m.$$

その理由は、 $\{p_t^{(1)}, p_t^{(2)}, \dots, p_t^{(m)}\}$ の従う確率分布 $p(x_t | \tilde{y}_{t-1})$ が以下のとおりに記述できるからである。

$$\begin{aligned} p(x_t | \tilde{y}_{t-1}) &= \iint p(x_t | x_{t-1}, v_t, \tilde{y}_{t-1}) p(v_t | x_{t-1}, \tilde{y}_{t-1}) p(x_{t-1} | \tilde{y}_{t-1}) dx_{t-1} dv_t \\ &= \iint \delta(x_t - F(x_{t-1}, v_t)) p(v_t) p(x_{t-1} | \tilde{y}_{t-1}) dx_{t-1} dv_t \end{aligned}$$

ただし、 δ はディラックのデルタ関数である。

2.3 フィルタリング

フィルタリングに必要な尤度 $\alpha_t^{(j)}$ の説明から始める。状態変数 x_t の一期先予測分布 $p(x_t | \tilde{y}_{t-1})$ から生成された粒子 $p_t^{(j)}$ が x_t と等しい場合、尤度は $p(v_t | p_t^{(j)})$ であり、これを $\alpha_t^{(j)}$ と記述する。 $\alpha_t^{(j)}$ は、観測方程式 $y_t = H(x_t, w_t)$ の逆関数 $w_t = G(y_t, x_t)$ の x_t を $p_t^{(j)}$ に変更した $G(y_t, p_t^{(j)})$ を $r(w_t)$ へ代入することによって、以下の式で記述される。

$$\alpha_t^{(j)} = p(v_t | p_t^{(j)}) = r \left(G(y_t, p_t^{(j)}) \right) \left| \frac{dG(y_t, p_t^{(j)})}{dy_t} \right| \quad j=1, 2, \dots, m.$$

$p(x_t | \tilde{y}_t)$ から生成される粒子 $\{f_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ は、 $p(x_t | \tilde{y}_t)$ から直接生成されるのではなく、上述した尤度 $\{\alpha_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を利用して一期先予測分布 $p(x_t | \tilde{y}_{t-1})$ から生成される粒子 $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を以下のようにリサンプリングすることで得られる。具体的には

$$f_t^{(j)} = \begin{cases} p_t^{(1)} & \text{確率} = \frac{\alpha_t^{(1)}}{\alpha_t^{(1)} + \alpha_t^{(2)} + \dots + \alpha_t^{(m)}} \\ \vdots & \vdots \\ p_t^{(m)} & \text{確率} = \frac{\alpha_t^{(m)}}{\alpha_t^{(1)} + \alpha_t^{(2)} + \dots + \alpha_t^{(m)}} \end{cases}$$

に従って選択すれば良い。その理由は以下のとおりである。

$\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を用いると予測分布は以下のように近似される。

$$p(x_t | \tilde{y}_{t-1}) \doteq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta(x_t - p_t^{(j)}) \quad (3)$$

一方、 $p(x_t | \tilde{y}_t)$ は以下のように式変形できる。

$$p(x_t | \tilde{y}_t) = \frac{p(y_t | x_t) p(x_t | \tilde{y}_{t-1})}{\int p(y_t | x_t) p(x_t | \tilde{y}_{t-1}) dx_t} \quad (4)$$

そこで、(3)を(4)へ代入することによって次式が得られる。

$$p(x_t | \tilde{y}_t) \doteq \frac{p(y_t | x_t) \sum_{j=1}^m \delta(x_t - p_t^{(j)})}{\int p(y_t | x_t) \sum_{i=1}^m \delta(x_t - p_t^{(i)}) dx_t} \quad (5)$$

$x_t = p_t^{(j)}$ の場合にだけ $\delta(x_t - p_t^{(j)}) \neq 0$ となるから、 $p(y_t | x_t) \delta(x_t - p_t^{(j)}) = p(y_t | p_t^{(j)}) \delta(x_t - p_t^{(j)})$ となる。また、ディラックのデルタ関数の性質から $\int p(y_t | x_t) \delta(x_t - p_t^{(j)}) dx_t = p(y_t | p_t^{(j)})$ である。以上の点を(5)へ代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} p(x_t | \tilde{y}_t) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^m p(y_t | p_t^{(i)})} \sum_{j=1}^m p(y_t | p_t^{(j)}) \delta(x_t - p_t^{(j)}) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^m \alpha_t^{(i)}} \sum_{j=1}^m \alpha_t^{(j)} \times \delta(x_t - p_t^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{i=1}^m \alpha_t^{(i)}} \times \delta(x_t - p_t^{(j)}) \end{aligned}$$

上式は $p(x_t | \tilde{y}_t)$ が $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ の各粒子に重み $\frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{i=1}^m \alpha_t^{(i)}}$ をつけたもので近似できることを示している。さらに、 $n_t^{(j)} \doteq m \times \frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{i=1}^m \alpha_t^{(i)}}$ を満たす整数列 $\{n_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を導入すると、上式は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} p(x_t | \tilde{y}_t) &= \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{i=1}^m \alpha_t^{(i)}} \times \delta(x_t - p_t^{(j)}) \\ &\doteq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m n_t^{(j)} \times \delta(x_t - p_t^{(j)}) \quad (6) \end{aligned}$$

(6)に従えば、 $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ の複製が $n_t^{(j)}$ 個ずつ含まれるような粒子を生成する、あるいは、 $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ に含まれる各粒子が尤度 $\alpha_t^{(j)}$ に比例する割合で抽出されるように m 個の粒子を復元抽出することによって、 $\{f_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を生成できることになる。つまり、 $\{\alpha_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を用いて $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をリサンプリングすることによって $\{f_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ が得られるのである。

2.4 平滑化

この小節では3種類の平滑化の方法を紹介する。平滑化には、一般的な意味での平滑化（固定区間平滑化）に加えて、固定点平滑化と固定ラグ平滑

化の2種類がある。まず、時点1から時点 n までの全データが与えられた上での時点 $s(1 \leq s < n)$ における状態変数の確率分布 $p(x_s | \tilde{y}_n)$ が固定区間平滑化分布である。次に、時点1から時点 t までのデータが与えられた上での時点 $s(1 \leq s < t)$ における状態変数の確率分布 $p(x_s | \tilde{y}_t)$ が固定点平滑化分布である。最後に、時点1から時点 $t+L$ までのデータが与えられた上での時点 t における状態変数の確率分布 $p(x_t | \tilde{y}_{t+L})$ が固定ラグ平滑化分布である。樋口編 (2011) によれば、状態変数ベクトルが高次元な場合の平滑化分布に関する推測は、固定区間平滑化分布 $p(x_t | \tilde{y}_n)$ の代わりに固定ラグ平滑化分布 $p(x_t | \tilde{y}_{t+L})$ を用いて実行されると記述されている。以下では、利用されることが少なかったと思われる固定点平滑化と固定ラグ平滑化の手順について説明する。

(1) 固定点平滑化

固定点平滑化によって得られる粒子 $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t|t}^{(j)}\}$ は $p(x_1, x_2, \dots, x_t | \tilde{y}_t)$ の j 番目の実現値である。つまり、時点 t 期までの情報 \tilde{y}_t を既知とした場合の時点 t までの状態変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t\}$ に関する j 番目の粒子である。 $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ は、時点 $t-1$ までの情報 \tilde{y}_{t-1} を与えられた場合の時点 $t-1$ までの状態変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_{t-1}\}$ の同時分布 $p(x_1, x_2, \dots, x_{t-1} | \tilde{y}_{t-1})$ から得られる粒子 $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と時点 $t-1$ における x_t の一期先予測分布 $Pr(x_t | \tilde{y}_{t-1})$ から得られる粒子 $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ の合計 $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をフィルタリングの場合と同じ重み $\frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{j=1}^m \alpha_t^{(j)}}$ でリサンプリングすることによって得られる。なお、 $p(x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, x_2 = s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)} | \tilde{y}_{t-1}) = \frac{1}{m}$ と仮定する。 $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ から抜き出した $\{s_{1|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ は $p(x_1 | \tilde{y}_t)$ から生成された粒子である。北川 (1996) によれば、この方法で固定区間平滑化を実行できる。⁴

⁴ 北川 (1996) の図6では、 t が大きくなるにつれて固定点平滑化分布 $p(x_1 | \tilde{y}_t)$ が素早く固定区間平滑化分布

リサンプリングに用いる粒子 $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ は $\{s_{1|2}^{(j)}, s_{2|2}^{(j)}\}_{j=1}^m$, $\{s_{1|3}^{(j)}, s_{2|3}^{(j)}, s_{3|3}^{(j)}\}_{j=1}^m, \dots$ と逐次的に粒子を生成していくことで得られる。そして、 $p_t^{(j)}$ は $s_{t-1|t-1}^{(j)}$ と $v_t^{(j)}$ を遷移方程式(1)へ代入することで得られる。

$\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をリサンプリングすることで $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得ることができ理由は以下のとおりである。

時点 $t-1$ までの観測値 \tilde{y}_{t-1} に加えて観測値 y_t が与えられた場合、状態変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ に関する同時確率密度 $p(x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, x_2 = s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = p_t^{(j)} | \tilde{y}_t)$ は以下のように更新される。

$$\begin{aligned} & p(x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, x_2 = s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = p_t^{(j)} | \tilde{y}_t) \\ &= p(x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, x_2 = s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = p_t^{(j)} | \tilde{y}_{t-1}, y_t) \\ &= \frac{p(y_t | x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = p_t^{(j)}) p(x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = p_t^{(j)} | \tilde{y}_{t-1})}{p(y_t | \tilde{y}_{t-1})} \\ &= \frac{p(y_t | p_t^{(j)}) p(x_1 = s_{1|t-1}^{(j)}, x_2 = s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, x_t = p_t^{(j)} | \tilde{y}_{t-1})}{p(y_t | \tilde{y}_{t-1})} \end{aligned}$$

$p(y_t | \tilde{y}_{t-1}) = \int p(y_t | x_t) p(x_t | \tilde{y}_{t-1}) dx_t$, (3) と $p(y_t | p_t^{(j)}) = \alpha_t^{(j)}$ から、 $p(y_t | \tilde{y}_{t-1}) = \int p(y_t | x_t) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta(x_t - p_t^{(j)}) dx_t = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_t^{(j)}$ である。したがって、時点 t までの情報 \tilde{y}_t に基づいて平滑化、つまり、確率分布 $p(x_1, x_2, \dots, x_t | \tilde{y}_t)$ から粒子 $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t}^{(j)}, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得るには、 m 個の t 次元ベクトルの粒子 $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をフィルタリングの場合と同じ重み $\frac{\alpha_t^{(j)}}{\sum_{j=1}^m \alpha_t^{(j)}}$ でリサンプリングすれば良いのである。

(2) 固定ラグ平滑化

上述したとおり時点 t までの観測値 \tilde{y}_t を与えられた上で状態変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ を平滑化する場合、固定点平滑化では、 $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をリサンプリングして $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t}^{(j)}, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を生成する。有限個の粒子(m 個)を用いて計算するために、 t が大きな値の場合は何度もリサンプリングを繰り返すことによって、少数の粒子が繰り返し出現してしまい、分布の形が損なわれることに $p(x_1 | \tilde{y}_{500})$ へ収束する様子が示されている。

なる。また、状態変数が k 次元ベクトルであれば、平滑化のために $k \times t \times m$ 個の粒子を保存しておかなければならない。

そこで、リサンプリングの対象となる粒子を $\{s_{t-L|t-1}^{(j)}, s_{t-L+1|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ へ変更するとともにリサンプリング回数を減らす (t が小さい場合は増加) ことによって $\{s_{t-L|t}^{(j)}, s_{t-L+1|t}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t}^{(j)}, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を生成する方法が提案された。北川 (2005) によれば、この方法で固定ラグ平滑化が実行可能である。ただし、 $f_t^{(j)} = s_{t|t}^{(j)}$ であり、 L は固定した値とする。 $\{s_{t|t+L}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を計算するには $\{s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を L 回リサンプリングする必要はあるが、 t が大きくなった場合でもリサンプリングの回数が L 回に限定されるので退化が進みにくい。これがこの方法の利点である。樋口編 (2011) によれば、 L は 10~20 に設定して平滑化を実行する場合が多い。⁵ この方法でも $\{s_{1|1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ から逐次的に粒子を生成していくことによって $\{s_{t-L|t-1}^{(j)}, s_{t-L+1|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ は得られる。そして、 $p_t^{(j)}$ は $s_{t-1|t-1}^{(j)}$ と $v_t^{(j)}$ を観測方程式 (2) へ代入することによって得られる。

平滑化する際に、固定点平滑化法では時点と同じ大きさの t 次のベクトルを生成していた。 $t > L+1$ の場合、固定ラグ平滑化では、 t よりも小さい次元の $L+1$ 次のベクトルの生成で済むので、平滑化のために保存しておかなければならない粒子の個数は $k \times (L+1) \times m$ 個となり、固定点平滑化で実行するよりも少なく済むため、計算上の負荷が少ない。

2.5 モンテカルロフィルタのアルゴリズム

モンテカルロフィルタにおける一期先予測とフィルタリング、平滑化 (固定区間平滑化) を続けて行なうアルゴリズムは以下のように記述することができる。⁶

⁵ 北川 (1996) では L を 20 程度、最大でも 50 以下にするのが望ましいと記述されている。

⁶ ここでは確率分布 $p(x_t | \tilde{y}_t)$ から x_t をサンプリングできると仮定しているが、サンプリングが難しい場合は提案分布 $q(x_t | \tilde{y}_t)$ を用いて x_t をサンプリングする。その場合は手

- (i) $j=1, 2, \dots, m$ について $f_0^{(j)} \sim p_0(x)$ を生成する。
- (ii) $t=1, 2, \dots, T$ について以下のステップを実行する。
 - (a) $v_t \sim q(v)$ であるから $\{v_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を生成する。(1) に基づいて生成した $\{f_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を用いるとともに、 $p_t^{(j)} = F(f_{t-1}^{(j)}, v_t^{(j)})$ という関係を利用して $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を生成する。こうして一期先予測を行なう。
 - (b) 直前で計算した $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を尤度 $\alpha_t^{(j)} = r(G(y_t, p_t^{(j)})) \left| \frac{dG(y_t, p_t^{(j)})}{dy_t} \right|$ の式へ代入して、 $\{\alpha_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を生成する。この $\{\alpha_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を利用して、 $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ から $\{f_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をリサンプリングする。こうしてフィルタリングを行なう。
 - (c) 尤度 $\{\alpha_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ を利用して、直前で計算した $\{p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ と過去の平滑化の結果 $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ の合計である $\{s_{1|t-1}^{(j)}, s_{2|t-1}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t-1}^{(j)}, p_t^{(j)}\}_{j=1}^m$ をリサンプリングすることによって平滑化が実行されて、 $\{s_{1|t}^{(j)}, s_{2|t}^{(j)}, \dots, s_{t-1|t}^{(j)}, s_{t|t}^{(j)}\}_{j=1}^m$ が得られる。

2.6 自己組織化状態空間モデル

パラメータ θ も状態変数として構築された状態空間モデルは自己組織化状態空間モデルと呼ばれる。このモデルを用いて未知のパラメータ θ と状態変数を同時に推定する。説明するに当たっては、観測方程式の未知パラメータと遷移方程式の未知パラメータをそれぞれ θ^m と θ^s と区別して記述する。つまり、 $\theta = (\theta^m, \theta^s)$ である。

$$x_t = F(x_{t-1}, \theta^s, v_t) \quad \text{遷移方程式} \quad t=1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

$$y_t = H(x_t, \theta^m, w_t) \quad \text{観測方程式} \quad (8)$$

前述したとおり、自己組織化状態空間モデルでは、状態変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ に加えて未知パラメータ θ を新たな状態変数と考え、 z_t を以下のとおりに定義する。

$$z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

z_t を用いて記述した遷移方程式と観測方程式は以下のとおりである。

$$z_t = F^a(z_{t-1}, \theta^s, v_t) \quad \text{遷移方程式} \quad t=1, 2, \dots, n. \quad (7')$$

$$y_t = H^a(z_t, \theta^m, w_t) \quad \text{観測方程式} \quad (8')$$

順が少し変更される。

今までは未知パラメータ θ を一定値であると仮定していたが、そのままでは推定上の問題があるので、 θ も時変すると仮定する。⁷ つまり、 z_t は以下のとおりに記述される。

$$z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \theta_t \end{bmatrix} \quad (9)$$

この場合、(7) と (8) を以下のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \theta_t^m \\ \theta_t^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x_{t-1}, \theta_{t-1}^s, v_t) \\ \theta_{t-1}^m + u_t^m \\ \theta_{t-1}^s + u_t^s \end{bmatrix} \quad \text{遷移方程式} \quad t=1,2,\dots,n. \quad (7'')$$

$$y_t = H(x_t, \theta_{t-1}^m, w_t) \quad \text{観測方程式} \quad (8'')$$

本節の 2.2 節から 2.5 節までに説明した方法を用いて、(7'') と (8'') から構成される状態空間モデルにおける状態変数 $\{z_t\}_{t=1}^n$ を推定する。

3 SCD モデル

以下では ACD モデルを説明した後に、SCD モデルを説明する。⁸

3.1 ACD モデル

2 つ事象が発生する時点 t_i と t_{i-1} の間隔は $x_i = t_i - t_{i-1}$ と記述され、デュレーションと呼ばれる。ACD モデルでは、観測される変数 x_i が x_i の条件付き期待値 ψ_i (状態変数) と誤差項 ε_i を用いて以下のように定式化される。

$$x_i = \psi_i \varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n. \quad (10)$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \quad (11)$$

ψ_i 、あるいは ψ_i を対数変換した $\psi_i (= \ln \psi_i)$ の定式化は様々なものを提案することが可能である。期待デュレーション ψ_i を定式化する基本モデルとして ψ_i と x_i の一次のラグ付き変数である ψ_{i-1} と x_{i-1} を説明変数とする一次式を仮定する。

$$\psi_i = \omega + \alpha \psi_{i-1} + \beta x_{i-1} \quad i=1,2,\dots,n. \quad (12a)$$

$$\psi_1 \sim N\left(0, \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\right) \quad (12b)$$

ここで、誤差項 ε_i の確率分布としてパラメータ γ で平均が 1 のガンマ分布 $GAM\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right)$ を仮定す

る。 ε_i の確率密度関数は以下のとおりである。

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. GAM\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right) \quad f_{\varepsilon_i|\gamma} = \frac{\varepsilon_i^{\gamma-1} \exp(-\varepsilon_i \gamma)}{\gamma^{-\gamma} \Gamma(\gamma)} \quad (13)$$

(10) と (13) から、 x_i の確率密度関数として次式を得る。

$$g(x_i|\Psi_i, \gamma) = \frac{1}{x_i} \left(\frac{x_i}{\Psi_i}\right)^{\gamma} \exp\left(-\frac{x_i \gamma}{\Psi_i}\right) \frac{\gamma^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}$$

$GAM\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right)$ において $\gamma=1$ とおけば、パラメータが 1 の指数分布となる。そこで、 ε_i の確率分布としてパラメータが 1 の指数分布を仮定する。

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. Exp(1) \quad f_{\varepsilon_i} = \exp(-\varepsilon_i) \quad (14)$$

(10) と (14) から、 x_i の確率密度関数として次式を得る。⁹

$$g(x_i|\Psi_i, \gamma) = \frac{1}{\Psi_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i}\right) \frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{1}{\Psi_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\Psi_i}\right)$$

したがって、対数尤度は以下のとおりである。

$$\ln L(\Psi_1, \dots, \Psi_n, \omega, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^n \ln \Psi_i - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Psi_i}$$

ただし、 Ψ_i は(12a)と(12b)で定めたとおりである。

なお、林・佐藤 (2016) によれば、ACD モデルの条件付き強度関数は以下のとおりである。

$$\lambda(t|N(t), t_1, t_2, \dots, t_{N(t)}) = \lambda_0 \left(\frac{t - t_{N(t)}}{\Psi_{N(t)-1}}\right) \frac{1}{\Psi_{N(t)-1}}$$

ただし、 $\lambda_0(t)$ はベースライン・ハザード関数であり、 ε_i の確率密度関数と生存関数の比である。

3.2 SCD モデル

SCD モデルでは、観測される変数 x_i が x_i の条件付き期待値 ψ_i (状態変数) と誤差項 ε_i を用いて以下のように定式化される。

$$x_i = \psi_i \varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n. \quad (15)$$

$$\varepsilon_i \sim i.i.d. \quad (16)$$

$$E[x_i | \Psi_{i-1}, \Psi_{i-2}, \dots, \Psi_{i-k}, \eta_i] = \Psi(\Psi_{i-1}, \Psi_{i-2}, \dots, \Psi_{i-k}, \eta_i) \equiv \psi_i$$

このモデルではデュレーション x_i の条件付き期待値 ψ_i が自らの過去の値 $\psi_{i-1}, \psi_{i-2}, \psi_{i-3}, \dots$ と誤差項 η_i に依存している。

⁹ $\varepsilon_i \sim Exp(\beta)$ であれば、 $f_{\varepsilon_i} = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\beta}\right)$ であるから、畳み込みによって x_i の確率密度関数は以下のとおりになる。

$$g(x_i) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x_i}{\beta}\right) \left|\frac{dx_i}{d\varepsilon_i}\right| = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x_i}{\beta}\right) \left|\frac{1}{\psi_i}\right|$$

ここで $\beta=1$ を代入すると次式が得られる。

$$g(x_i) = \frac{1}{\psi_i} \exp\left(-\frac{x_i}{\psi_i}\right)$$

⁷ 矢野 (2014) を参照されたい。

⁸ SCD モデルについては砂田 (2018) においても説明されている。

期待デューレーション Ψ_i の定式化は自由である。また、 ε の確率分布も0以上の値だけを実現する確率分布という条件は必要であるものの、細かい条件はない。つまり、 Ψ_i の定式化と ε_i の確率分布の特定化によって様々なSCDモデルを定義できる。

ポアソン過程では x_i が独立かつ同一の指数分布に従っている。その結果、計数過程 $\{N(t)\}$ がポアソン過程に従っている。一方、SCDモデルでは、 ε_i が独立かつ同一の指数分布に従っていたとしても、 Ψ_i が変動するので、 x_i の確率分布は変動する。

前述したとおり、 Ψ_i 、あるいは Ψ_i を対数変換した $\psi_i (= \ln \Psi_i)$ の定式化は様々なものを提案することが可能である。本稿では単純なモデルとして、期待デューレーション Ψ_i を対数変換した ψ_i の一階の自己回帰モデルを仮定する。

$$\psi_i = \delta + \phi \psi_{i-1} + \eta_i \quad \eta_i \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (17a)$$

$$\psi_1 \sim N\left(0, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right) \quad (17b)$$

このようにSCDモデルでは誤差項を含むように Ψ_i が定式化されるので、デューレーションに加えてボラティリティーにも確率的な変動が含まれるようにACDモデルが拡張されている。¹⁰

Bauwens=Veredas (2004)によれば、誤差項がワイブル分布に従うSCDモデルのハザード関数 (= 強度関数) は以下のとおりである。¹¹

$$h(d_i | \psi_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i^{-\gamma} d_i^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{d_i}{\Psi_i}\right)^{\gamma} - \left(\frac{u_i^2}{2\sigma^2}\right)\right] du_i}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{d_i}{\Psi_i}\right)^{\gamma} - \left(\frac{u_i^2}{2\sigma^2}\right)\right] du_i}$$

3.3 自己組織化状態空間モデルを用いた推定方法

未知パラメータも状態変数として構築された状態空間モデルである自己組織化状態空間モデル (Self-organizing state-space model) では、状態

¹⁰ ACDモデルでは Ψ_i を定式化する際に誤差項を含めない。たとえば、 $\Psi_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1}$ と定式化する。

¹¹ Bauwens=Veredas (2004) の389ページの(15)を参照されたい。ガンマ分布に従う場合のハザード関数は解析的に導出されないと記述されている。

変数 ψ_i に加えて未知パラメータも状態変数として推定される。未知パラメータ $(\delta, \phi, \sigma_\eta^2)$ も推定の対象とするに当たり、 $(\delta_i, \phi_i, \sigma_{\eta,i}^2)$ は以下のようなランダムウォークに従うと仮定する。

$$\delta_i = \delta_{i-1} + u_{\delta,i}$$

$$\phi_i = \phi_{i-1} + u_{\phi,i}$$

分散 $\sigma_{\eta,i}^2$ については非負制約が必要となるので対数変換したものがランダムウォークに従うと仮定する。

$$\ln \sigma_{\eta,i}^2 = \ln \sigma_{\eta,i-1}^2 + u_{\sigma,i}$$

なお、誤差項 $u_{\delta,i}$, $u_{\phi,i}$, $u_{\sigma,i}$ は平均が0の正規分布に従う。

新たな状態変数ベクトルを用いた遷移方程式は以下のとおりである。

$$\begin{pmatrix} \psi_i \\ \delta_i \\ \phi_i \\ \ln \sigma_{\eta,i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{i-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{i-1} \\ \delta_{i-1} \\ \phi_{i-1} \\ \ln \sigma_{\eta,i-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_i \\ u_{\delta,i} \\ u_{\phi,i} \\ u_{\sigma,i} \end{pmatrix} \quad (18)$$

そして、新たな状態変数ベクトルを用いた観測方程式は以下のとおりである。

$$\ln x_i = \psi_i + \ln \varepsilon_i = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \psi_i \\ \delta_i \\ \phi_i \\ \ln \sigma_{\eta,i}^2 \end{pmatrix} + \ln \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \text{Exp}(1) \quad (19)$$

(i) 一期先予測の方法

(18)の ψ_{i-1} の代わりに一期前のフィルタリングした値 $\psi_{i-1|i-1}^{(j)}$ を代入して $\psi_{i|i-1}^{(j)}$ を得る。次に、(18)の δ_{i-1} の代わりに一期前のフィルタリングした値 $\delta_{i-1|i-1}^{(j)}$ を代入して $\delta_{i|i-1}^{(j)}$ を得る。そして、(18)の ϕ_{i-1} の代わりに一期前のフィルタリングした値 $\phi_{i-1|i-1}^{(j)}$ を代入して $\phi_{i|i-1}^{(j)}$ を得る。さらに、(18)の $\ln \sigma_{\eta,i-1}^2$ の代わりに一期前のフィルタリングした値 $\ln \sigma_{\eta,i-1|i-1}^{2(j)}$ を代入して $\ln \sigma_{\eta,i|i-1}^{2(j)}$ を得る。

(ii) ψ_i のフィルタリングの方法

尤度 $\{\alpha_{i,\psi}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を重みとして利用して一期先予測の粒子 $\{\psi_{i|i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ からリサンプリングすることで

表1 取引データの集計例

取引データ集計前			取引データ集計後		
取引時刻	取引価格	出来高	取引時刻	取引価格	出来高
9:05:10	1000	1	9:05:10	1000	4
9:05:10	1000	3	9:05:11	1002	5
9:05:11	1002	2	9:05:13	1003	2
9:05:11	1002	3	⋮	⋮	⋮
9:05:13	1003	2	⋮	⋮	⋮

フィルタリングした粒子 $\{\psi_{it}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。

(iii) $\delta_i^{(j)}, \phi_i^{(j)}, \ln\sigma_{\eta,i}^{2(j)}$ のフィルタリングの方法

尤度 $\{\alpha_{i,\delta}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を重みとして利用して一期先予測の粒子 $\{\delta_{it-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ からリサンプリングすることでフィルタリングした粒子 $\{\delta_{it}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。同様に、尤度 $\{\alpha_{i,\phi}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と一期先予測の粒子 $\{\phi_{it-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を用いてフィルタリングした粒子 $\{\phi_{it}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。さらに、尤度 $\{\alpha_{i,\ln\sigma^2}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と一期先予測の粒子 $\{\ln\sigma_{\eta,i-1}^{2(j)}\}_{j=1}^m$ を利用して粒子 $\{\ln\sigma_{\eta,i}^{2(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。

(iv) ψ_i の平滑化の方法 (固定点平滑化)

尤度 $\{\alpha_{i,\psi}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を重みとして利用して、一期前の平滑化で生成した粒子 $\{\psi_{1|i-1}^{(j)}, \psi_{2|i-1}^{(j)}, \dots, \psi_{i-1|i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と $\{\psi_{i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ の合計からリサンプリングすることで平滑化した粒子 $\{\psi_{1|i}^{(j)}, \psi_{2|i}^{(j)}, \dots, \psi_{i-1|i}^{(j)}, \psi_{i|i}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。

(v) $\delta_i^{(j)}, \phi_i^{(j)}, \ln\sigma_{\eta,i}^{2(j)}$ の平滑化の方法 (固定点平滑化)

尤度 $\{\alpha_{i,\delta}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を重みとして利用して、一期前の平滑化で生成した粒子 $\{\delta_{1|i-1}^{(j)}, \delta_{2|i-1}^{(j)}, \dots, \delta_{i-1|i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と $\{\delta_{i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ の合計をリサンプリングすることで平滑化した粒子 $\{\delta_{1|i}^{(j)}, \delta_{2|i}^{(j)}, \dots, \delta_{i-1|i}^{(j)}, \delta_{i|i}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。同様に、尤度 $\{\alpha_{i,\phi}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と一期前の平滑化で生成した粒子 $\{\phi_{1|i-1}^{(j)}, \phi_{2|i-1}^{(j)}, \dots, \phi_{i-1|i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と $\{\phi_{i-1}^{(j)}\}_{j=1}^m$ の合計を用いて平滑化した粒子 $\{\phi_{1|i}^{(j)}, \phi_{2|i}^{(j)}, \dots, \phi_{i-1|i}^{(j)}, \phi_{i|i}^{(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。さらに、尤度 $\{\alpha_{i,\ln\sigma^2}^{(j)}\}_{j=1}^m$ と一期前の平滑化で生成した粒子 $\{\ln\sigma_{\eta,1|i-1}^{2(j)}, \ln\sigma_{\eta,2|i-1}^{2(j)}, \dots, \ln\sigma_{\eta,i-1|i-1}^{2(j)}\}_{j=1}^m$ と $\{\ln\sigma_{\eta,i-1}^{2(j)}\}_{j=1}^m$ の合計を用いて平滑化した粒子 $\{\ln\sigma_{\eta,1|i}^{2(j)}, \ln\sigma_{\eta,2|i}^{2(j)}, \dots, \ln\sigma_{\eta,i-1|i}^{2(j)}, \ln\sigma_{\eta,i}^{2(j)}\}_{j=1}^m$ を得る。

4 データとその加工方法について

4.1 分析するデータについて

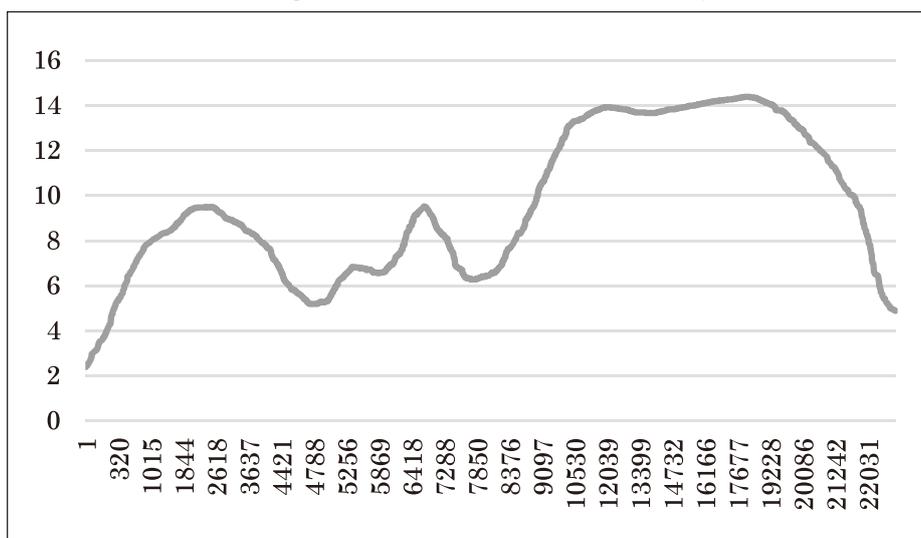
本稿では東京商品取引所で取引されている金先物（現物受渡用）のティックデータを用いてSCDモデルを推定した。試験的に2016年4月11日を選んでいる。金先物も含めて、日本の商品先物市場では一般に期先物の出来高が最も多い。そこで、今回の分析でも4月11日における期先物である2017年2月限のデータを利用した。金先物市場における取引時間は午前9時～15時15分が日中の取引時間である。9時に板合せ取引が行なわれて9時1分に始値が付く。その後、ザラバ取引が15時15分まで行なわれる。¹² これ以外の時間帯に時間外取引も行われているが、本稿の分析では9時1分から15時15分までの日中のデータだけを利用してパラメータの推定を行った。分析対象とする取引は4,017個であった。

本稿で分析するティックデータとは、1日の中で取引される一つ一つの取引に関するデータを集めたものである。したがって、ティックデータには、取引時刻（時分秒）、取引価格（円）、取引数量（枚）が含まれている。東京商品取引所から購入したティックデータには、日付（年月日）、取引種別（先物かオプションか）、商品番号、限月（年月）、約定時刻（時分秒）、約定価格（円）、出来高（枚）が入力されている。

ティックデータを用いて分析するので、1秒間に複数の取引が執行される場合もある。この場合

¹² 現在は取引システムが変更されて、8時45分から15時15分までが日中の取引時間であり、寄り付きと大引けで板合せ取引を行なう。

図1 デュレーション x_i を平滑した結果 (縦軸は取引間隔, 横軸は経過時間)



は表1に示すとおり, 同じ時点に複数の取引情報が表示される。取引間隔を計算する場合には同じ時点(秒)で執行された取引を分けることはできないので, 1つのデータと考える。こうして, 取引が執行された時点(秒)ごとに出来高(取引枚数)と約定価格が2,088個得られた。

4.2 データの加工方法について

全ての取引が含まれているティックデータから, 時間間隔データを作成する。そのデータにSCDモデルを直接適用して, パラメータを推定するのではなく, 時間間隔データを元に計算した平滑化曲線から得られた値でデータを割った後, そのデータを用いてSCDモデルのパラメータを推定する。

平滑化の方法は様々である。局所多項式回帰においてバンド幅を可変としたLOESS (LOcally weighted ReGrESSion) が考案された。LOESSをさらに発展させたものにスーパースムーザがある。本稿ではスーパースムーザを用いてデータを平滑化する。¹³

5 推定結果

本稿では試験的に2016年4月11日に東京商品取引所で取引された金先物市場(現物受渡用)のティックデータを用いてSCDモデルを推定した。

¹³ データの平滑化については竹澤(2007)に詳しい。

具体的には, 誤差項に指数分布を仮定したSCDモデル, つまり, (15), (17a, b) と(14)式に基づいたモデルのパラメータを自己組織化状態空間モデル(18), (19)として推定した。推定に当たっては, 各取引時点で5,000個の粒子を発生させた。未知パラメータ(δ, ϕ, σ_i^2)を推定する際の初期値としてSCDモデルをベイズ推定した結果(表3)を利用している。また, 未知パラメータはランダムウォークに従うと仮定したが, 誤差項 $u_{\delta,i}, u_{\phi,i}, u_{\sigma_i,i}$ の標準偏差は杉浦=中妻(2016)に従い, 0.05と仮定した。

推定を行なう前に取引間隔(デュレーション)のデータを平滑化によって加工しなくてはならない。平滑化の方法は幾つかあるが, 森保(2006)に従ってスーパースムーザを利用して, 取引間隔のデータを平滑化した。原データを平滑化した値で割ることによって確定的な日中の傾向を予め除去しておくのである。¹⁴ 取引間隔を平滑化した結果が図1である。横軸は取引開始時刻近く(9時)からの経過時間(単位は秒)である。午前中は最初の1時間半, 次の1時間, 午後に山があり, 大きく3つの山があることが読み取れる。

平滑化した値で取引間隔 x_i を割って調整した値

¹⁴ Engle=Russell(1998)の1137ページに期待デュレーションは確定的(deterministic)な成分と確率的(stochastic)な成分に分けられると記述されている。

図2 $\bar{\psi}_{i|i}$ の推移 (縦軸は平均, 横軸は取引された順番)

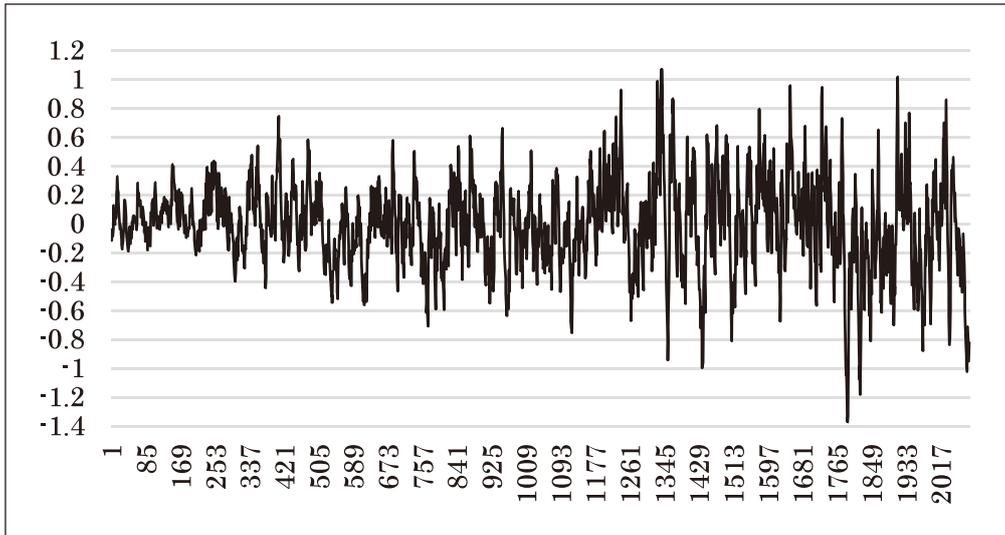


図3 $\bar{\delta}_{i|i}$, $\bar{\phi}_{i|i}$, $\bar{\sigma}_{\eta}^2_{i|i}$ の推移 (縦軸は平均, 横軸は取引された順番)

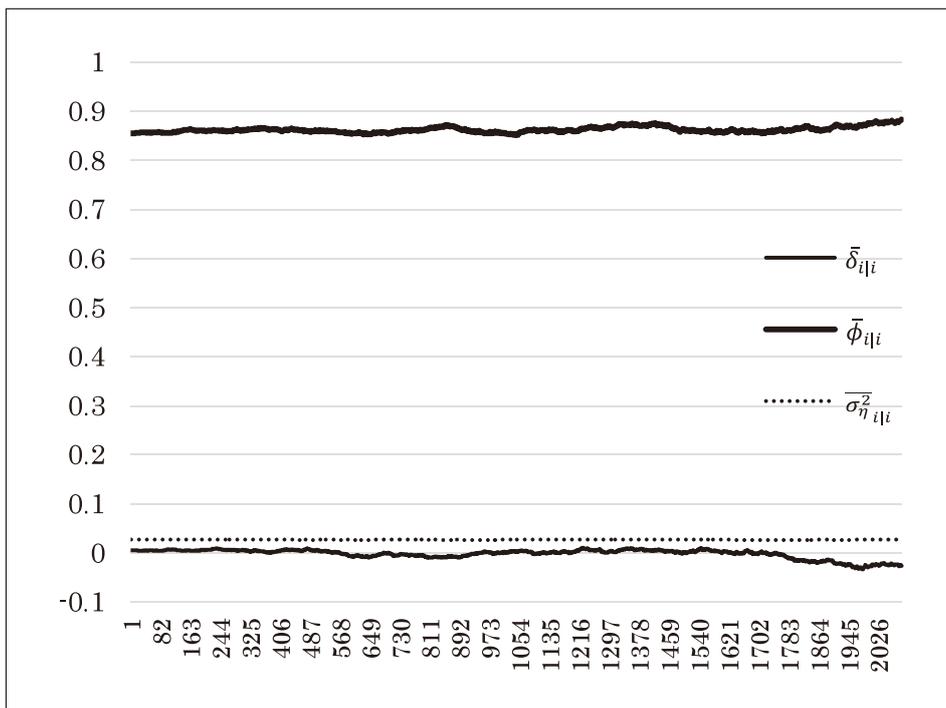


表2 SCDモデルを自己組織化状態空間モデルとして推定した結果

変数	全取引時点の平均	全取引時点の標準偏差
$\{\bar{\delta}_{i i}\}_{i=1}^{2088}$	-0.001833	0.108811
$\{\bar{\phi}_{i i}\}_{i=1}^{2088}$	0.862557	0.098860
$\{\bar{\sigma}_{\eta}^2_{i i}\}_{i=1}^{2088}$	0.026804	0.003024

表3 SCDモデルをベイズ推定した結果

パラメータ	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
δ	0.004955	0.005017	0.220067
ϕ	0.855059	0.022434	0.409312
σ_η^2	0.027147	0.002642	0.712333

出典：砂田 (2018)

を改めてデータ x_i と定めて SCD モデルを当てはめる。自己組織化状態空間モデルを用いるので、状態変数だけでなく、パラメータを推定した結果も取引時点ごとに計算される。図2に状態変数の系列 $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ をフィルタリングによって推定した結果を示す。¹⁵ 各取引時点で5,000個の粒子 $\{\psi_{it}^{(j)}\}_{j=1}^{5000}$ を生成してその平均 $\bar{\psi}_{it}$ を各取引時点における状態変数の推定値と考える。図2の縦軸は各取引時点で状態変数を5,000回生成した結果を平均した値 $\bar{\psi}_{it}$ 、横軸は取引された順番である。図2を見ると、 $\bar{\psi}_{it}$ の系列は0の周囲を変動していることが分かる。 $\psi_i = \ln \Psi_i$ であるから ψ_i の推定値は多くの取引時点において1に近い値であると考えられる。

次に、図3に3つのパラメータ ($\delta, \phi, \sigma_\eta^2$) をフィルタリングによって推定した結果を示す。3つのパラメータのそれぞれについて、各取引時点で5,000個の粒子 ($\{\delta_{it}^{(j)}\}_{j=1}^{5000}, \{\phi_{it}^{(j)}\}_{j=1}^{5000}, \{\sigma_{\eta, it}^{2(j)}\}_{j=1}^{5000}$) を生成して、その平均 ($\bar{\delta}_{it}, \bar{\phi}_{it}, \bar{\sigma}_{\eta, it}^2$) を各取引時点におけるパラメータの推定値と考えている。図3の縦軸は各取引時点で3つのパラメータをそれぞれ5,000回生成した結果を平均した値、横軸は取引された順番である。3つのパラメータのそれぞれについて2,088個の推定値があり、その推移を示したところ、2,088個の取引時点を通じて3つともほとんど変化していないように見える。

表2には、3つのパラメータ ($\delta, \phi, \sigma_\eta^2$) の2,088個の推定値 (= 平均) について全取引時間を通じて計算した標本平均と標本標準偏差を示す。定数項 δ については、 $\{\bar{\delta}_{it}\}_{i=1}^{2088}$ の全取引時点を通じた平

均 $\bar{\delta}$ が -0.0018、標準偏差が 0.108811 であった。各取引時点において生成した5,000個の粒子の標本平均を標本標準偏差で割った値の絶対値は全ての取引時点で1.96以下であった。したがって、有意に0と異なるとは判断できないであろう。なお、 $\psi = \ln \Psi$ であるから、定数項 δ が負値になっても問題は無い。回帰係数 ϕ については、 $\{\bar{\phi}_{it}\}_{i=1}^{2088}$ の全取引時点を通じた平均が 0.8626、標準偏差が 0.09886 であるから大きな変化がないと考えられる。各取引時点において生成した5,000個の粒子の標本平均を標本標準偏差で割った値は全ての取引時点で1.96以上であった。誤差項の分散 σ_η^2 については、 $\{\bar{\sigma}_{\eta, it}^2\}_{i=1}^{2088}$ の全取引時点を通じた平均が 0.0268、標準偏差が 0.0030 であるから大きな変化がないと考えられる。各取引時点において生成した5,000個の粒子の標本平均を標本標準偏差で割った値は全ての取引時点で1.96以上であった。

また、DIC は 4453.203、 $\{\bar{\psi}_{it}\}_{i=1}^{2088}$ を用いて計算した対数尤度は -1935.28 であった。

参考のため、ベイズ推定した結果を表3に示しておく。¹⁶ 定数項 δ は 0.00496 であり、有意に0であることを棄却できない。しかし、回帰係数 ϕ は 0.855 であり有意に0と異なる判定された。採択率は約 97.7% であった。 $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ の採択率は約 56.7% であった。また、DIC は 4472.84、状態変数の系列 $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ の事後平均を用いて計算した対数尤度は -2117.84 であった。以上から δ, ϕ と σ_η^2 の推定値はおおよそ似た結果となった。

6 結 論

本稿の目的はモンテカルロフィルタを紹介する

¹⁵ 2節と3節において平滑化について説明したが、平滑化による推定までは行なわない。

¹⁶ 砂田 (2018) の推定結果を再掲したものである。

ことと、モンテカルロフィルタを用いてSCDモデルを推定する方法を紹介することである。第2節では、自己組織化状態空間モデルを含めてモンテカルロフィルタを紹介した後、その推定方法を紹介した。第3節では、SCDモデルと自己組織化状態空間モデルによる推定方法を説明した。第4節では、分析対象の取引間隔（デュレーション）データについて説明した後、日中効果を取り除くのに用いる平滑化について説明した。平滑化の手法はいろいろあるが、本稿では森保（2006）と同じスーパースムーザを利用して平滑化したデータを利用して推定した。第5節では、東京商品取引所の金先物市場のティックデータを対象にしてSCDモデルのパラメータをモンテカルロフィルタで推定した結果を示した。SCDモデルをベイズ推定した結果と比較したところ、類似の結果が得られた。

参考文献

- [1] Bauwens, L., and Veredas, D., 2004, "The stochastic conditional duration model: a latent variable model for the analysis of financial durations, " *Journal of Econometrics*, 119, pp.381-412.
- [2] Engle, R.F., and Russel, J.R., 1997, "Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange price with the ACD model, " *Journal of Empirical Finance*, 4, pp.187 - 212.
- [3] Engle, R.F. and Russel, J.R., 1998, "Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data, " *Econometrica*, 66, pp.1127-1162.
- [4] Gordon, N., Salmond, D. and Smith, A., 1993, "Novel approach to nonlinear /non-Gaussian Bayesian state estimation, " *IEEE Proceedings-F*, 140, pp.107-113.
- [5] 林高樹・佐藤彰洋, 2016, 『金融市場の高頻度データ分析』, 朝倉書店.
- [6] 林高樹, 2012, 「高頻度データの分析(2): 不
等間隔データ分析」, 刈屋武昭他編, 『経済時
系列ハンドブック』の第6章4節に所収, 朝
倉書店.
- [7] 樋口知之編, 2011年, 『データ同化入門』, 朝
倉書店.
- [8] 樋口知之, 2011年, 『予測に生かす統計モデ
リングの基本』, 講談社.
- [9] Kalman, R.E., 1960, "A new approach to
linear filtering and prediction
problems, " *Trans. ASME-J, Basic Eng. (ser.D)*,
82, pp.35-45.
- [10] Kitagawa, G., 1993, "A monte carlo
filtering and smoothing method for non-
Gaussian nonlinear state space
models, " *Technical report*, Institute of
Statistical Mathematics research
memorandum, No.462.
- [11] Kitagawa, G., 1996, "Monte carlo filter and
smoother for non-Gaussian nonlinear state
space models, " *Journal of Computational and
Graphical Statistics*, 5, pp.1-25.
- [12] 北川源四郎, "モンテカルロ・フィルタおよ
び平滑化について", 1996, 『統計数理』, 第
44巻1号, pp.31-48.
- [13] Kitagawa, G., 1998, "A self-organizing
state space models, " *Journal of American
Statistical Association*, 93, pp.1203-1205.
- [14] 北川源四郎, 2005年, 『時系列解析入門』, 岩
波書店.
- [15] Men, Z., and Kolkiewicz, A. W., Wirjanto,
T. S., 2015, "Bayesian analysis of
asymmetric stochastic conditional duration
model, " *Journal of Forecasting*, 34, pp.36 -
56.
- [16] Men, Z., and Kolkiewicz, A. W., Wirjanto,
T. S., 2016, "Bayesian inference of
asymmetric stochastic conditional duration
models, " *Journal of Statistical Computation*

- and Simulation*, 86, pp.1295 - 1319.
- [17] 森保洋, 「金先物市場の日中価格変動と取引時間間隔」, 2006, 『経営と経済』, 長崎大学経済学会, 第85巻3・4号, pp.408-430.
- [18] Pacurar, M., 2008, “Autoregressive conditional duration models in finance : A survey of the theoretical and empirical literature,” *Journal of Economic Survey*, 22, pp.711-751.
- [19] 佐藤整尚・高橋明彦, 2005, “モンテカルロフィルタを用いた金利モデルの推定” 『計算統計Ⅱ－マルコフ連鎖モンテカルロ法の基礎』の補論Bに所収, 岩波書店.
- [20] 砂田洋志, 2018, “SCD モデルの理論と実証—東京商品取引所における金先物取引への応用—”, 山形大学紀要 (社会科学), 第48巻第2号, pp.41-63.
- [21] Strickland, C.M., Forbes, C.S., and Martin, G.M., 2006, “Bayesian analysis of stochastic conditional duration model,” *Computational Statistics & Data Analysis*, 50, pp.2247-2267.
- [22] 杉浦航・中妻照雄, 2016, 「ティックデータを用いた株式市場における約定予測」, 日本金融・証券計量・工学学会編『ファイナンスにおける数値計算手法の新展開』の第4章に所収, 朝倉書店.
- [23] 高部勲, 2010, “非線形状態空間モデル及びモンテカルロ・フィルタによるNAIRUの推定”, 『統計研究彙報』, 第67号, pp.55-88.
- [24] 竹澤邦夫, 2007, 『みんなのためのノンパラメトリック回帰 (上) 第3版』, 吉岡書店.
- [25] 矢野浩一・佐藤整尚, 2007, “初期分布探索付き自己組織化状態空間モデルによる金融時系列解析の最前線:t分布付き確率的ボラティリティ変動モデルへの応用”, 『FSA リサーチレビュー 2006』, 金融庁金融研究センター, pp.1-24.
- [26] 矢野浩一・飯田泰之・和合肇, 2011, 「ゼロ金利制約下における日本経済—流動性制約家計を含むニューケインジアン DSGE モデル」, 『世界同時不況と景気循環分析』の第9章に所収, 浅子・飯塚・宮川編集, 東京大学出版会.
- [27] 矢野浩一, 2014, “粒子フィルタの基礎と応用: フィルタ・平滑化・パラメータ推定”, 『日本統計学会誌』, 第44巻, pp.189-216.

Theory and Application of Monte Carlo Filter
—— Application to Stochastic Conditional Duration model ——

Hiroshi SUNADA

(Management, Social Systems Course)

The monte carlo filter is a very useful estimation method, because we can use it even if the error term does not follow the normal distribution and /or model is non-linear. In this paper we introduce monte carlo filter and show how to apply it to financial model. We apply it to stochastic conditional duration model. We use tick data of golden futures on Tokyo Commodity Exchange. We estimate the parameters and state variables by monte carlo filter. The result is almost the same as that by Bayesian method.